

Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2022»

**Применение непрерывного метода решения операторных уравнений
к приближенному решению амплитудно-фазовой проблемы**

Илья Владимирович Бойков, Анастасия Александровна Пивкина

г. Новосибирск, 3–7 октября 2022 г.

1. Обзор литературы

1. Бойков И.В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, N 9, с. 1308 - 1314.
2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука. 1970.
3. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. - М.: Мир, 1988.
4. Boikov I., Zelina Y., Vasyunin D. Approximate Methods for Solving of Onedimensional Amplitude-phase Problem//Published in: 2020 Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT). Date: 16 April 2020. Publisher: IEEE. Conference Location: Moscow, Russia. DOI: 10.1109/MWENT47943.2020.9067415
5. Бойков И. В., Зелина Я. В. Приближённые методы решения амплитудно-фазовой проблемы для непрерывных сигналов // Измерительная техника. 2021. №. 5. С. 37–46. [https:// doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-5-37-46](https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-5-37-46)
6. I V Boikov, Ya V Zelina and D I Vasyunin Approximate methods for solving amplitude-phase problem for discrete signals// I V Boikov et al 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 2099 012002 Journal of Physics: Conference Series 2099 (2021) 012002 IOP Publishing doi:10.1088/1742-6596/2099/1/012002
7. Потапов А. А., Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Пахомов А. А., Герман В. А. Новейшие методы обработки изображений. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
8. Wolf E., Physics Letters A, 2010, vol. 374, no. 3, pp. 491–495. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.10.074>
9. Wolf E., Advances in Imaging and Electron Physics, 2011, vol. 165, pp. 283–325. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385861-0.00007-5>
10. Boykov, I.; Roudnev, V.; Boykova, A. Approximate Methods for Solving Problems of Mathematical Physics on Neural Hopfield Networks. Mathematics 2022, 1, 0.

2. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

Пусть B – банахово пространство; K – оператор, действующий из B в B ;

$$B(a, r) = \{x, a \in B : \|x - a\| \leq r\}, \quad S(a, r) = \{x, a \in B : \|x - a\| \leq r\}$$

$\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1)/h$ – логарифмическая норма линейного оператора K .

Пусть дана вещественная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$ в n -мерном пространстве R_n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормами

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|. \quad (1)$$

Логарифмические нормы матрицы A в этих пространствах равны

$$\Lambda_1(A) = \max_j \left(a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \right), \quad \Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left((A + A^T)/2 \right), \quad \Lambda_3(A) = \max_i \left(a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right). \quad (2)$$

Здесь $\lambda_{\max} \left((A + A^T)/2 \right)$ – наибольшее собственное значение матрицы $\left((A + A^T)/2 \right)$.

2. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

Рассмотрим уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (3)$$

где $A(x)$ – нелинейный оператор, действующий из банахова пространства B в B .

Уравнению (3) поставим в соответствие задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad (4)$$

$$x(0) = x_0. \quad (5)$$

Теорема 2.1. Пусть уравнение (3) имеет решение x^* и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в банаховом пространстве B , справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0. \quad (6)$$

Тогда решение задачи Коши (4), (5) сходится к решению x^* уравнения (3) при любом начальном приближении $x(0) \in B$.

Теорема 2.2. Пусть уравнение (3) имеет решение x^* и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $B(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

1) при любом $t(t > 0)$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0; \quad (7)$$

2) справедливо неравенство (6).

Тогда решение задачи Коши (4), (5) сходится к решению уравнения (3) при любом начальном приближении $x(0) \in B(x^*, r)$.

2. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

Обозначим через $A'(x)$ производную Гато (Фреше) оператора $A(x)$. Преобразуем уравнение $A(x) - f = 0$ к виду

$$(A'(x))^* A(x) - (A'(x))^* f = 0, \quad (8)$$

где $(A'(x))^*$ оператор, сопряженный с $(A'(x))$.

Уравнению (8) поставим в соответствие задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = - \left[(A'(x))^* A(x) - (A'(x))^* f \right], \quad (9)$$

$$x(0) = x_0. \quad (10)$$

Теорема 2.3. Пусть уравнение (8) имеет единственное решение x^* в шаре $B(x^*, r)$, $r > 0$. Пусть следующие условия справедливы для любой дифференцируемой кривой $g(t)$, лежащей в шаре $B(x^*, r)$:

1) для любого $t(t > 0)$ справедливо неравенство

$$\int_0^t \Lambda \left((A'(g(\tau)))^* A'(g(\tau)) \right) d\tau \geq 0; \quad (11)$$

2) выполняется неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Lambda \left((A'(g(\tau)))^* A'(g(\tau)) \right) d\tau \geq \alpha_g, \quad \alpha_g > 0. \quad (12)$$

Тогда решение задачи Коши (9), (10) сходится к решению x^* уравнения (8) при любом начальном значении $x(0) \in B(x^*, r)$.

2. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

Введем стабилизирующую функцию $\alpha(t)$ со следующими свойствами:

1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0$;

2) при всех $t \in [0, \infty)$, $\alpha(t) \geq 0$.

Уравнению (8) поставим в соответствие задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha(t)x(t) - \left[(A'(x))^* A(x) - (A'(x))^* f \right], \quad (13)$$

$$x(0) = x_0. \quad (14)$$

Теорема 2.4. Пусть уравнение (8) имеет единственное решение x^* в шаре $B(x^*, r)$, $r > 0$. Пусть следующие условия справедливы для любой дифференцируемой кривой $g(t)$, лежащей в шаре $B(x^*, r)$:

1) для любого $t (t > 0)$ справедливо неравенство

$$\int_0^t \Lambda \left((\alpha(\tau) + A'(g(\tau)))^* (\alpha(\tau) + A'(g(\tau))) \right) d\tau \geq 0; \quad (15)$$

2) выполняется неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Lambda \left((\alpha(\tau) + A'(g(\tau)))^* (\alpha(\tau) + A'(g(\tau))) \right) d\tau \geq \alpha_g, \quad \alpha_g(t) > 0. \quad (16)$$

Тогда решение задачи Коши (13), (14) сходится к решению x^* уравнения (8) при любом начальном значении $x(0) \in B(x^*, r)$.

Принципиальные отличия непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений (сравнение с методом Ньютона – Канторовича):

1) Обоснования сходимости непрерывного метода Ньютона - Канторовича даны в гильбертовых пространствах. Непрерывный метод решения операторных уравнений обоснован в банаховых пространствах;

2) Реализация непрерывного метода Ньютона - Канторовича требует существования и построения обратного оператора $[K'(x(t))]^{-1}$ на всей траектории решения задачи Коши (4)-(5). Непрерывный метод решения операторных уравнений обоснован в банаховых пространствах лишен этого недостатка. Более того, при его реализации не требуется существования производной $K'(x(t))$. Производная $K'(x(t))$ используется в обобщениях непрерывного метода решения операторных уравнений.

3) Сходимость непрерывного метода Ньютона - Канторовича имеет локальный характер. Сходимость обобщений непрерывного метода решения операторных уравнений носит глобальный характер.

3. Восстановление функции по амплитуде ее спектра

3.1. Одномерный случай

Пусть $f(t) \in C[0, a]$ – неизвестная функция.

Требуется восстановить функцию $f(t) \in [0, a]$, располагая информацией о модуле ее спектра $A(\omega) = |F(\omega)|$, $F(\omega)$ – преобразование Фурье функции $f(t)$.

Постановка математической задачи.

Нужно решить нелинейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a f(t) e^{i\omega t} dt \right| = A(\omega), \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (17)$$

Первая вычислительная схема

Приближенное решение уравнения (17) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \psi_k(t), \quad (18)$$

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \in [0, a] \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = \overline{0, N-1},$$

$$\Delta_k = [t_k, t_{k+1}), \quad k = \overline{0, N-2}, \quad \Delta_{N-1} = [t_{N-1}, a], \quad t_k = ak / N, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k = \overline{0, N-1}$, определяются из системы уравнений

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} e^{i\omega_l t} dt \right| = A(\omega_l), \quad l = \overline{0, N-1}, \quad (19)$$

где $\omega_l = -B + 2Bl / N$, $l = \overline{0, N}$.

Здесь B – достаточно большое число, определяемое неравенством $\sup_{\omega \in (-\infty, -B] \cup [B, \infty)} \leq 1/N$.

Первая вычислительная схема

Для решения системы (19) используется непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

$$\frac{d\alpha_l(u)}{du} = G(u) \left(\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(u) \int_{\Delta_k} e^{i\omega_l t} dt \right| - A(\omega_l) \right), \quad l = \overline{0, N-1}. \quad (20)$$

Логарифмическая норма якобиана вектора

$$\left(G(u) \left(\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(u) \int_{\Delta_k} e^{i\omega_0 t} dt \right| \right), \dots, G(u) \left(\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(u) \int_{\Delta_k} e^{i\omega_{N-1} t} dt \right| \right) \right) \quad (21)$$

должна быть отрицательной в каком-нибудь N -мерном банаховом пространстве.

В работе система (21) решается методом Эйлера

$$\alpha_l(n+1) = \alpha_l(n) + g_l(n)h \left(\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(n) \int_{\Delta_k} e^{i\omega_l t} dt \right| - A(\omega_l) \right), \quad l = \overline{0, N-1}. \quad (22)$$

Вторая вычислительная схема

Приближенное решение ищется в виде полигона

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \psi_k(t), \quad (23)$$

с базисными функциями $\psi_0(t) = 1 - \frac{n}{a}t$, $0 \leq t \leq \frac{a}{n}$,

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \frac{n}{a}t, & 0 \leq t \leq \frac{a}{n}, \\ 2 - \frac{n}{a}t, & \frac{a}{n} \leq t \leq \frac{2a}{n}, \end{cases}$$

$$\psi_k(t) = \begin{cases} -k + 1 + \frac{n}{a}t, & \frac{(k-1)a}{n} \leq t \leq \frac{ka}{n}, \\ k + 1 - \frac{n}{a}t, & \frac{ka}{n} \leq t \leq \frac{(k+1)a}{n}, \end{cases} \quad k = \overline{2, n-1}.$$

$$\psi_n(t) = -n + 1 + \frac{n}{a}t, \quad \frac{(n-1)a}{n} \leq t \leq a.$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k = \overline{0, N-1}$, определяются из системы уравнений

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \int_0^a \psi_k(t) e^{i\omega_l t} dt \right| = A(\omega_l), \quad l = \overline{0, N-1}. \quad (24)$$

Регуляризация осуществляется непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений

$$\frac{d\alpha_l(u)}{du} = G(u) \left(\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(u) \int_0^a \psi_k(t) e^{i\omega_l t} dt \right| - A(\omega_l) \right), \quad l = \overline{0, N-1}. \quad (25)$$

3. Восстановление функции по амплитуде ее спектра

3.2. Двумерный случай

Требуется восстановить функцию $f(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in [0, a]^2$ по амплитуде $A(\omega_1, \omega_2)$ ее спектра $F(\omega_1, \omega_2)$. Здесь $F(\omega_1, \omega_2)$ – преобразование Фурье функции $f(t_1, t_2)$, $A(\omega_1, \omega_2) = |F(\omega_1, \omega_2)|$.

Постановка математической задачи.

Требуется решить нелинейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^a \int_0^a f(t_1, t_2) e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2 \right| = A(\omega_1, \omega_2). \quad (26)$$

Вычислительная схема

Приближенное решение уравнения (26) ищем в виде кусочно-постоянной функции

$$f_N(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{kl} \psi_k(t_1, t_2), \quad (27)$$

$$\text{где } \psi_{kl}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & (t_1, t_2) \in \Delta_{kl}, \\ 0, & (t_1, t_2) \in [0, a]^2 \setminus \Delta_{kl}, \end{cases} \quad k, l = \overline{0, n-1},$$

$$\Delta_{kl} = \{(t_1, t_2) : t_1 \in [x_k, x_{k+1}), t_2 \in [x_l, x_{l+1})\}, \quad k, l = \overline{0, n-2},$$

$$\Delta_{k, n-1} = \{(t_1, t_2) : t_1 \in [x_k, x_{k+1}), t_2 \in [x_{n-1}, x_n]\}, \quad k = \overline{0, n-2},$$

$$\Delta_{n-1, l} = \{(t_1, t_2) : t_1 \in [x_{n-1}, x_n], t_2 \in [x_l, x_{l+1})\}, \quad l = \overline{0, n-2},$$

$$\Delta_{n-1, n-1} = [x_{n-1}, x_n; x_{n-1}, x_n], \quad x_k = \frac{ak}{n}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Коэффициенты $\{\alpha_{kl}\}$, $k, l = \overline{0, n-1}$ определяются из системы

$$\left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{kl} \iint_{\Delta_{kl}} e^{i(v_{k_1} t_1 + v_{k_2} t_2)} dt_1 dt_2 \right| = A(v_{k_1}, v_{k_2}), \quad k_1, k_2 = \overline{0, n-1}, \quad (28)$$

где $v_k = -B + 2Bk/n$, $k = \overline{0, n}$.

Системе (28) ставится в соответствие система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_{k_1 k_2}(u)}{du} = G_{kl}(u) \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{kl}(u) \iint_{\Delta_{kl}} e^{i(v_{k_1} t_1 + v_{k_2} t_2)} dt_1 dt_2 - A(v_{k_1}, v_{k_2}) \right], \quad k_1, k_2 = \overline{0, n-1}. \quad (29)$$

4. Восстановление дискретных последовательностей

4.1. Одномерный случай

Имеется последовательность $f(x_k)$, $k = \overline{0, N}$ – исходное изображение, заданное набором значений $f(x_k)$ в точках x_k , $k = \overline{0, N}$. Информация об этой последовательности задается набором действительных чисел $\gamma_l = |F(z_l)| = \left| \sum_{k=0}^N f(x_k) z_l^k \right|$, $l = \overline{0, N}$, где $F(z)$ – Z-преобразование последовательности $f(x_k)$, $F(z) = \sum_{k=0}^N f(x_k) z^k$.

Множество z_l , $l = \overline{0, N}$ – это точки на плоскости комплексной переменной, в которой известны абсолютные значения Z-преобразования последовательности $f(x_k)$, $k = \overline{0, N}$.

Требуется, располагая информацией о последовательности $\gamma_l = |F(z_l)|$ восстановить последовательность $f(x_k)$, $k = \overline{0, N}$.

Постановка математической задачи.

Необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\left| \sum_{k=0}^N \alpha_k z_l^k \right| = \gamma_l, \quad \gamma_l = |F(z_l)|, \quad l = \overline{0, N}. \quad (30)$$

Вычислительная схема

Воспользовавшись непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений, имеем

$$\frac{d\alpha_l(u)}{du} = g_l(u) \left[\left| \sum_{k=0}^N \alpha_k(u) z_l^k \right| - \gamma_l \right], \quad l = \overline{0, N}. \quad (31)$$

Система (31) решается методом Эйлера

$$\alpha_l(n+1) = \alpha_l(n) + g_l(n)h \left[\left| \sum_{k=0}^N \alpha_k(n) z_l^k \right| - \gamma_l \right], \quad l = \overline{0, N}, \quad (32)$$

где h – шаг метода Эйлера, $g_l(n)$, ($|g_l(n)| = \pm 1$) подбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана последовательности

$$\left(\left| \sum_{k=0}^N \alpha_k(n) z_0^k \right|, \left| \sum_{k=0}^N \alpha_k(n) z_1^k \right|, \dots, \left| \sum_{k=0}^N \alpha_k(n) z_N^k \right| \right) \quad (33)$$

была отрицательной.

4. Восстановление дискретных последовательностей

4.2. Двумерный случай

Пусть $f(n_1, n_2)$, $0 \leq n_i \leq N_i$, $i=1, 2$ – исходное изображение, заданное набором положительных значений (n_1, n_2) . Ниже для простоты обозначений полагаем $N_i = N$, $i=1, 2$. Применяем к множеству значений $f(n_1, n_2)$ Z-преобразование $F(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N f(k_1, k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2}$. В $(N+1)^2$ точках (ξ_i, η_j) , $i, j = \overline{0, N}$ известны значения $\gamma_{ij} = |F(\xi_i, \eta_j)|$, $i, j = \overline{0, N}$.

Требуется восстановить последовательность $f(n_1, n_2)$ по значениям γ_{ij} , $i, j = \overline{0, N}$.

Постановка математической задачи.

Необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\left| \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N f_{k_1 k_2} \xi_i^{k_1} \eta_j^{k_2} \right| = \gamma_{ij}, \quad i, j = \overline{0, N}. \quad (34)$$

Вычислительная схема

Система уравнений (34) решается непрерывным методом

$$\frac{df_{ij}(u)}{du} = g_{ij}(u) \left[\sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N f_{k_1 k_2}(u) \xi_i^{k_1} \eta_j^{k_2} \right] - \gamma_{ij}, \quad i, j = \overline{0, N}, \quad (35)$$

где функции $g_{ij}(u)$, $|g_{ij}(u)| > 0$ подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия сходимости непрерывного метода (теоремы 2.1, 2.2).

В противном случае необходимо воспользоваться его обобщением (теоремы 2.3, 2.4).

Модельный пример 1

Восстановление одномерного сигнала, заданного функцией

$$f(t) = \begin{cases} \sin 2t, & t \in [0, \pi/2], \\ 0, & t \in [-B, B] \setminus [0, \pi/2]. \end{cases} \quad (36)$$

Возмущение датчиком случайных чисел: $A_k(\omega_l) = A(\omega_l) + \xi_l(k)$, $l = \overline{0, N}$, $k = 1, 2, 3$.

Результаты восстановления функции (36) при $B=5$, $N=99$, $h=0,001$, при 1000 итераций и при возмущении: а) $\max_{0 \leq l \leq N} |\xi_l(1)| = 0,001$, б) $\max_{0 \leq l \leq N} |\xi_l(2)| = 0,01$, в) $\max_{0 \leq l \leq N} |\xi_l(3)| = 0,1$.

Модельный пример 1

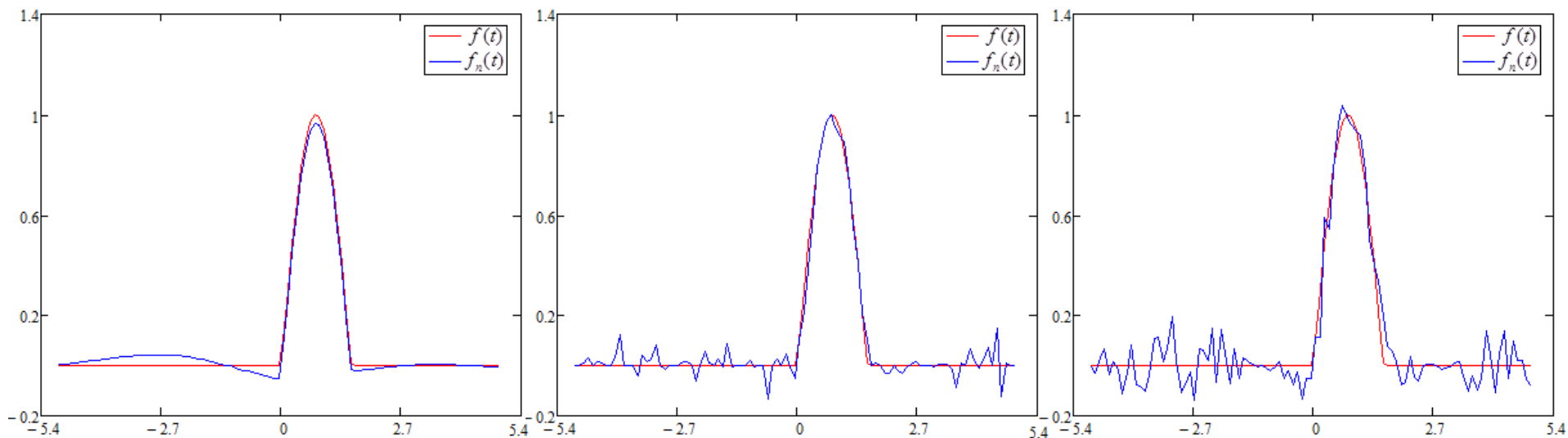


Рисунок 1 – Восстановление сигнала (36) при возмущении амплитуды его спектра случайной функцией

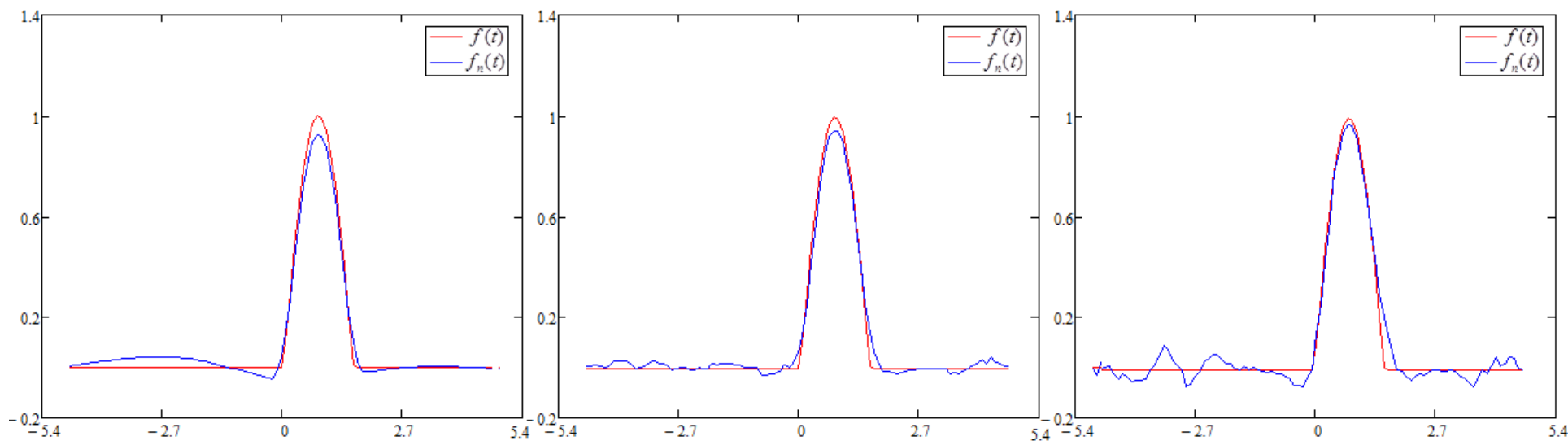


Рисунок 2 – Восстановление сигнала (36) при возмущении амплитуды его спектра случайной функцией после фильтрации и осреднения по пяти значениям

Модельный пример 2

Восстановление двумерного сигнала, заданного функцией

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \\ 0, & (-D \leq t_1, t_2 \leq D) \setminus (0 \leq t_1, t_2 \leq 1). \end{cases} \quad (37)$$

Результаты восстановления функции (37) при $D=3$, $N=50$, $h=0,001$, при 500 итераций и при возмущении $\varepsilon=0,01$.

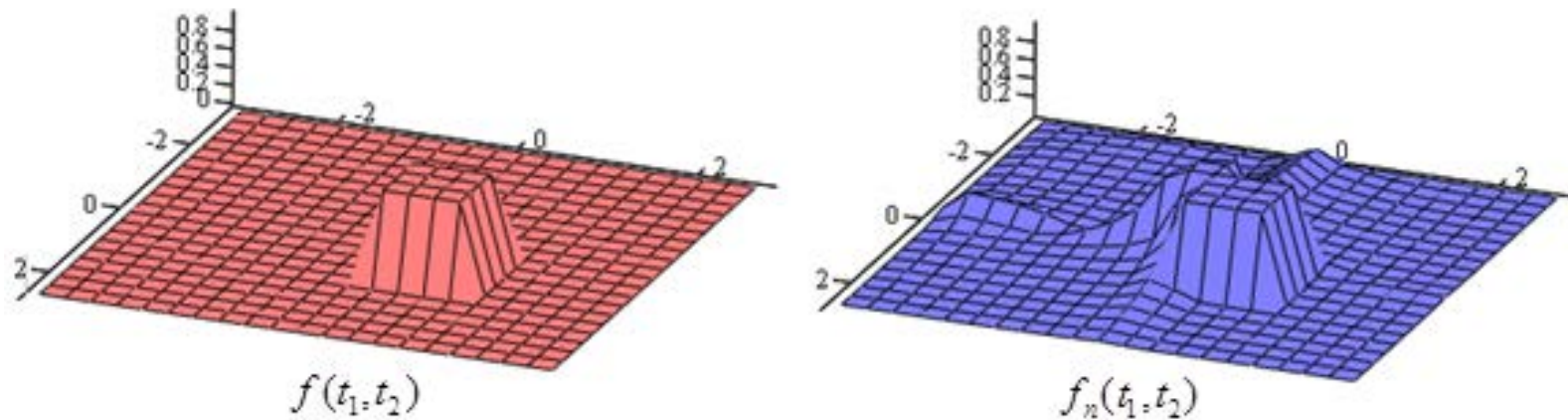


Рисунок 3 – Восстановление сигнала (37) при возмущении амплитуды спектра исходного сигнала случайной функцией с амплитудой $\varepsilon=0,01$

Модельный пример 2

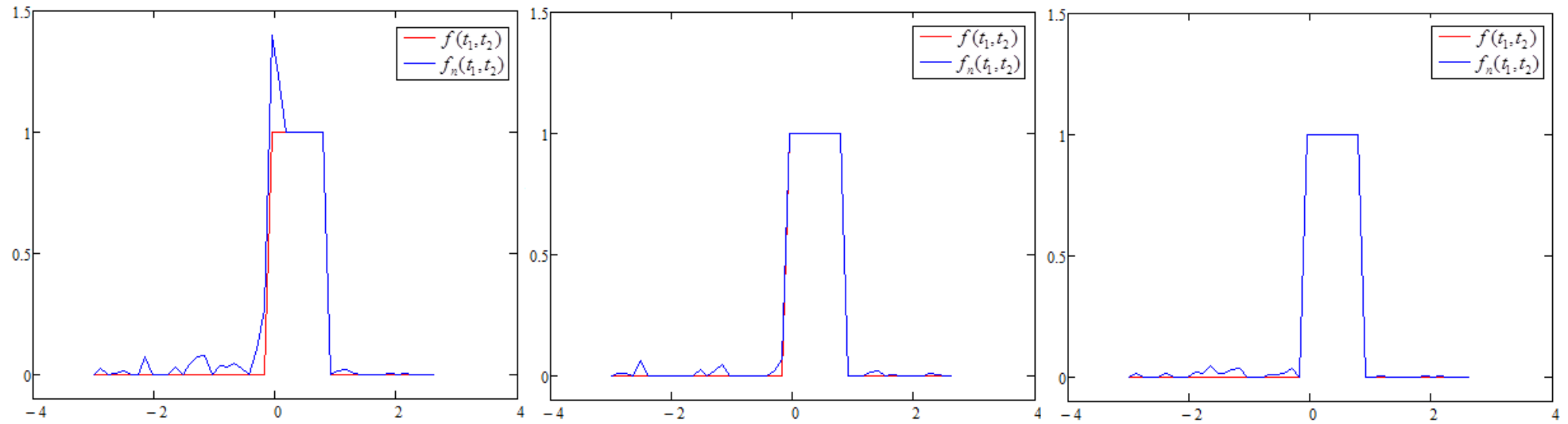


Рисунок 4 – Передний, центральный, задний срезы восстановленного сигнала (37) при возмущении $\varepsilon = 0,01$

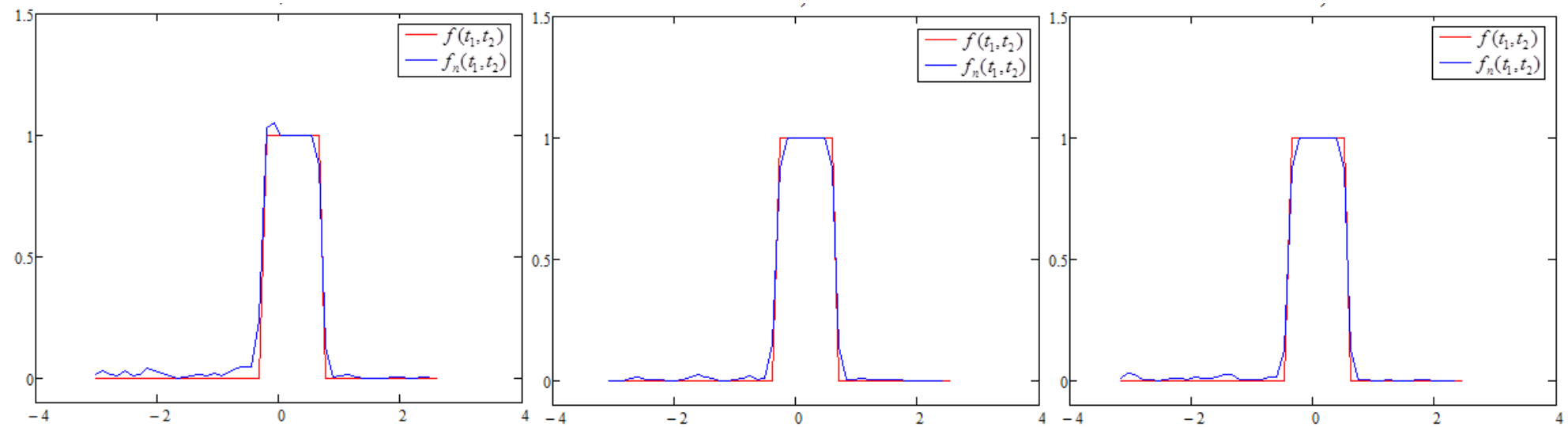


Рисунок 5 – Передний, центральный, задний срезы восстановленного сигнала (37) при возмущении $\varepsilon = 0,01$ после фильтрации и осреднения по пяти значениям

Модельный пример 3

Восстановление дискретной последовательности

$$f\left(\frac{\pi k}{2N}\right) = \sin \frac{\pi k}{N}, \quad k = \overline{0, N}. \quad (38)$$

Возмущение датчиком случайных чисел: $A_k(\omega_l) = A(\omega_l) + \xi_l(k)$, $l = \overline{0, N}$, $k = 1, 2, 3$.

Результаты восстановления дискретной последовательности (38) при $B=10$, $N=100$, $h=0,001$, при 1000 итераций и при возмущении: а) $\max_{0 \leq l \leq N} |\xi_l(1)| = 0,001$, б) $\max_{0 \leq l \leq N} |\xi_l(2)| = 0,01$, в) $\max_{0 \leq l \leq N} |\xi_l(3)| = 0,1$.

Модельный пример 3

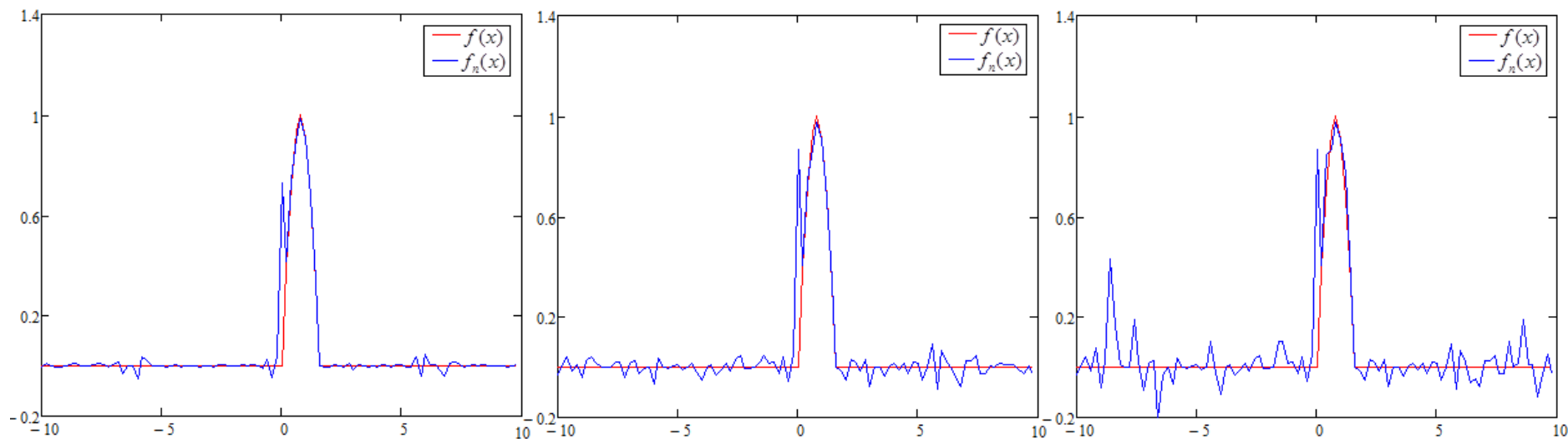


Рисунок 6 – Восстановление дискретной последовательности (38) при возмущении амплитуды его спектра случайной функцией

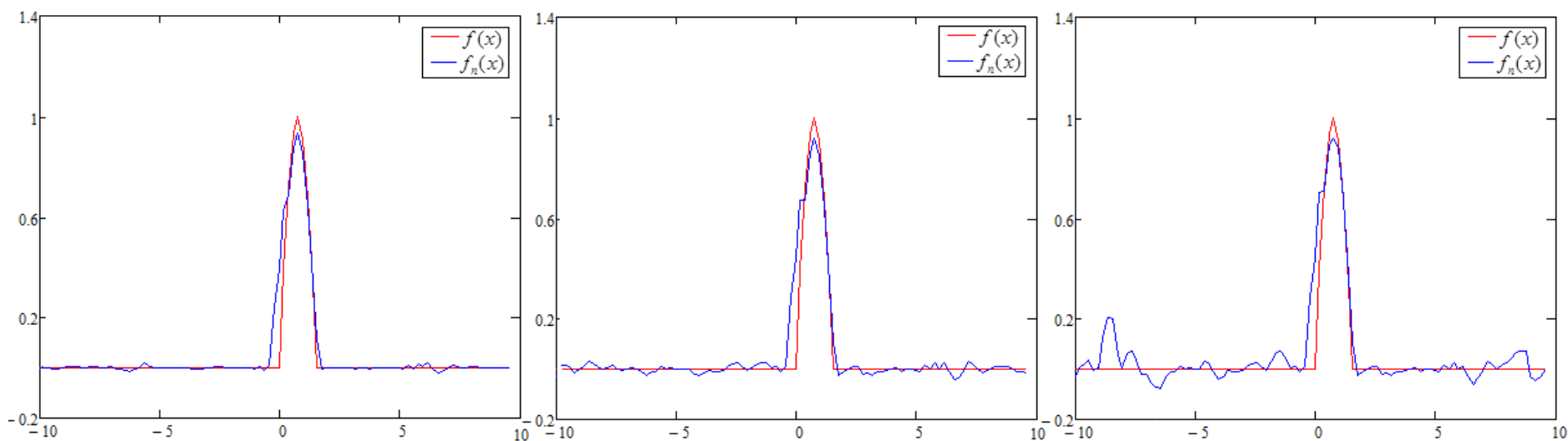


Рисунок 7 – Восстановление дискретной последовательности (38) при возмущении случайной функцией после фильтрации и осреднения по трем значениям

Модельный пример 4

Восстановление двумерного сигнала дискретной последовательности, заданного функцией

$$f(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{4-n_1+n_2}{4}, & 0 \leq n_1 \leq 2, -2 \leq n_2 \leq 0, \\ \frac{4-n_1-n_2}{4}, & 0 \leq n_1 \leq 2, 0 \leq n_2 \leq 2, \\ \frac{4+n_1+n_2}{4}, & -2 \leq n_1 \leq 0, -2 \leq n_2 \leq 0, \\ \frac{4+n_1-n_2}{4}, & -2 \leq n_1 \leq 0, 0 \leq n_2 \leq 2, \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (39)$$

Результаты восстановления функции (39) при $D=5$, $N=50$, $h=0,001$, при 500 итераций.

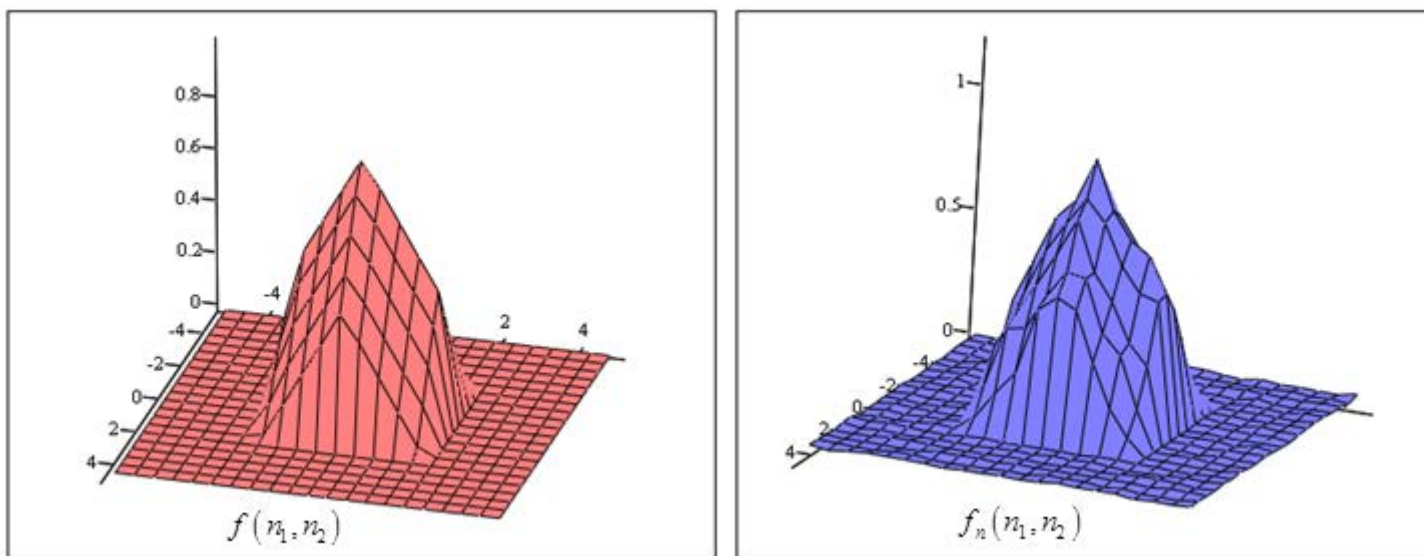


Рисунок 8 – Восстановление последовательности, заданной формулой (39)

Модельный пример 4

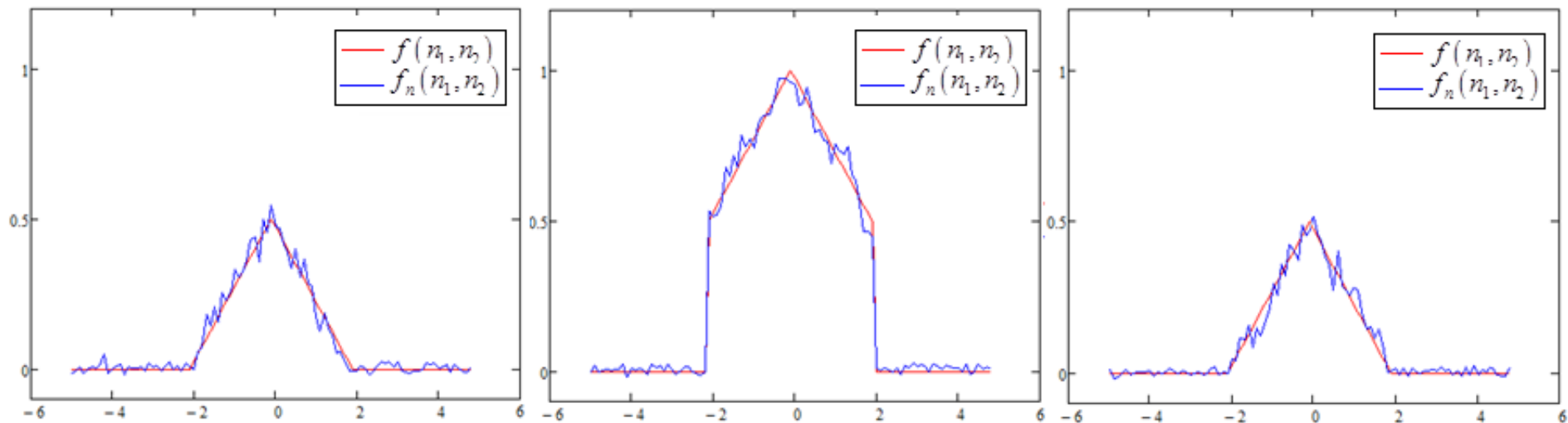


Рисунок 9 – Передний, центральный, задний срезы восстановленного сигнала (39)

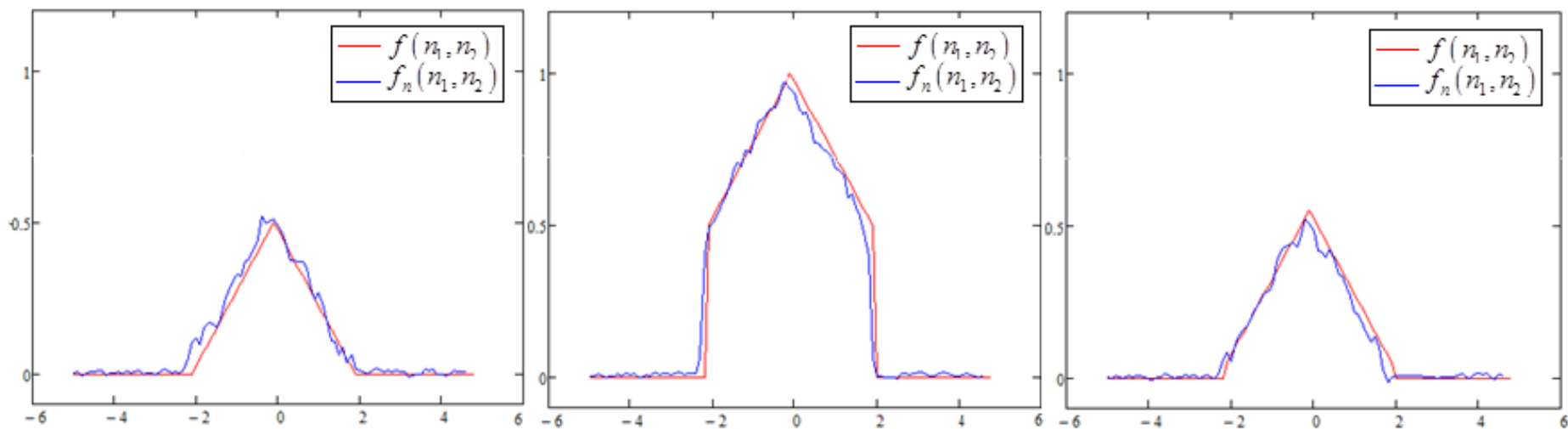


Рисунок 10 – Передний, центральный, задний срезы восстановленного сигнала (39) после осреднения по трем значениям

Выводы

- Предложен двухступенчатый метод решения фазовой проблемы:
 - на первом этапе восстанавливается функция (в непрерывном случае) или последовательность (в дискретном случае);
 - на втором этапе вычисляется преобразование Фурье восстановленной функции и вычисляется фаза спектра функции (непрерывной или дискретной).
- Предложенный метод применим к произвольным непрерывным и дискретным преобразованиям.

Спасибо за внимание!