

Б.Ю. ЛЕМЕШКО

**О руководстве по критериям проверки отклонения распределения от
нормального закона**

Новосибирский государственный технический университет
Кафедра теоретической и прикладной информатики

e-mail: lemeshko@ami.nstu.ru

<https://ami.nstu.ru/~headrd/>

Лемешко Б. Ю. [Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению](#) : монография / Б.Ю. Лемешко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : ИНФРА-М, 2023. – 353 с. – (Научная мысль). – DOI [10.12737/1896110](#). - ISBN 978-5-16-017901-8 (print), ISBN 978-5-16-110911-3 (online)

По сравнению с первым изданием существенно расширено множество рассмотренных специальных критериев нормальности. Всё множество критериев проранжировано по мощности относительно ряда близких конкурирующих гипотез, что облегчает выбор наиболее предпочтительных критериев. Показано, что в приложениях свойства критериев могут существенно изменяться вследствие наличия ошибок округления, и это необходимо учитывать при формировании статистических выводов.

Оглавление

Предисловие	6
Введение	9
1. Общие положения	13
1.1. Общие сведения о проверке статистических гипотез.....	13
1.2. Конкурирующие гипотезы.....	20
2. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона	24
2.1. Критерий проверки на симметричность.....	24
2.2. Критерий проверки на эксцесс.....	26
2.3. Критерий Шапиро–Уилка (Shapiro–Wilk Test).....	29
2.4. Критерий Эппса–Пулли (Epps–Pulley Test).....	34
2.5. Модифицированный критерий Шапиро–Уилка.....	40
2.6. Критерий Харке–Бера проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса (Jarque–Bera Test).....	43
2.7. Модификация Гель–Гаствирта критерия проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса (Gel–Gastwirth Test).....	47
2.8. Модификация Д’Агостино критерия проверки на симметричность.....	50
2.9. Модификация Д’Агостино критерия проверки на симметричность и значение эксцесса.....	52
2.10. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса Д’Агостино.....	56

2.11. Критерий Фросини (Frosini Test).....	60
2.12. Критерии Хегази–Грина (Hegazy–Green Test).....	64
2.13. Критерий Гери (Geary Test).....	69
2.14. Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона (David–Hartley–Pearson Test).....	74
2.15. Критерий Шпигельхальтера (Spiegelhalter Test).....	78
2.16. Критерий Ройстона (Royston Test).....	83
2.17. Критерий Васичека (Vasicek Test).....	89
2.18. Критерий Корреа (Correa Test).....	100
2.19. Критерий Ван Эса (Van Es Test).....	109
2.20. Критерий Эбрахими (Ebrahimi Test).....	118
2.21. Критерии Заманзаде–Аргами (Zamanzade–Arghami Test).....	127
2.22. Критерий Гаствирта (Gel–Miao–Gastwirth Test).....	145
2.23. Критерии Локка–Сперриера (Locke–Spurrer Tests).....	149
2.24. Критерий Мартинеса–Иглевича (Martinez–Iglewicz Test).....	157
2.25. Критерий Филлибена (Filliben Test).....	162
2.26. Критерий Шапиро–Франция (Shapiro–Francia Test).....	166
2.27. Критерий Вайсберга–Бингема (Weisberg–Bingham Test).....	167
2.28. Критерий Жанга (Zhang Test).....	170
2.29. Критерий Лина–Мудхолкара (Lin–Mudholkar Test).....	174
2.30. Критерий Чена–Шапиро (Chen–Shapiro Test).....	177
2.31. Критерий Бонетта–Сейер (Bonett–Seier Test).....	181
2.32. Критерий Али-Чорго-Ревеса (Aly–Csorgo–Revesz Test) ..	184

2.33. Критерии Бонтемпа–Меддахи (Bontemps–Meddahi Test).....	187
2.34. Критерии Десгань–Мишо (Desgagne–Micheaux Tests)....	193
2.35. Критерии Оя (Oja Tests).....	201
2.36. Модификация критерии Оя.....	210
2.37. Критерий Чена (Chen Test).....	211
2.38. Критерий Брис–Хьюберт–Стройфа (Brys–Hubert–Struyf Test).....	214
3. Непараметрические критерии согласия при проверке нормальности	219
3.1. Критерий Колмогорова.....	219
3.2. Критерий Купера.....	223
3.3. Критерий Крамера–Мизеса–Смирнова.....	226
3.4. Критерий Ватсона.....	229
3.5. Критерий Андерсона–Дарлингга.....	232
3.6. Критерии Жанга.....	235
3.7. О применении непараметрических критериев согласия.....	244
4. Критерии согласия типа хи-квадрат при проверке нормальности	247
4.1. Критерий согласия χ^2 Пирсона.....	247
4.2. Критерий согласия Никулина–Рао–Робсона.....	259
4.3. О применении критериев согласия типа χ^2	265
5. Ранжирование критериев нормальности по мощности... 267	
6. Анализ погрешностей измерений в классических экспериментах	278

6.1. О роли проверки нормальности	278
6.2. Анализируемые эксперименты	280
6.3. Применяемые критерии нормальности	283
6.4. Проверка гипотезы о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону	285
6.5. О вычислении достигнутых уровней значимости	289
6.6. Конкурирующие законы, пригодные для описания результатов анализируемых экспериментов	291
6.7. Выводы по результатам анализа	296
7. Развитие технологий проверки статистических гипотез	298
7.1. Изменение роли компьютерных технологий при статистическом анализе данных	298
7.2. Интерактивный подход к вычислению p-value	299
8. Применение критериев нормальности в условиях влияния ошибок округления	303
8.1. Влияние ошибок округления на распределения статистик критериев нормальности	303
8.2. Применение критериев нормальности в условиях округления измерений	312
8.3. Реализация применения критериев в условиях влияния ошибок округления	320
9. Заключение	327
Библиографический список	328
Приложение А. Таблицы для критериев проверки нормальности	338

Жизнь не стоит на месте.

Оказалось, что не все критерии нормальности были охвачены в первом издании руководства (2015) [132], появились новые критерии.

В современных условиях стало очевидным наличие весомых факторов, приводящих к изменению свойств статистических критериев и исключающих возможность применения классических результатов.

Например, сам факт округления результатов измерений ограничивает возможность применения критериев проверки статистических гипотез по большим выборкам и может отражаться на результатах статистических выводов при анализе высокоточных измерений при любых объёмах выборок. В настоящем руководстве эта проблема обсуждается.

Кроме этого, сделана попытка проранжировать всё множество критериев нормальности по мощности относительно рассмотренных конкурирующих законов.

Применение специальных критериев, ориентированных только на проверку гипотезы о принадлежности анализируемых данных нормальному закону, рассматривается в разделе 2.

Применение для проверки нормальности непараметрических критериев согласия рассматривается в разделе 3.

Применение для проверки нормальности критериев согласия типа χ^2 рассматривается в разделе 4.

В разделе 5 множество всех критериев нормальности упорядочивается по мощности относительно рассматриваемых в руководстве конкурирующих гипотез. А далее критерии ранжируются по сумме мест, занятых критериями в этих упорядоченных рядах. На полученные рейтинги можно ориентироваться при выборе наиболее предпочтительных критериев для использования в приложениях.

В разделе 6 рассматривается проверка нормальности погрешностей в классических экспериментах.

В разделе 7 обсуждаются некоторые проблемы, связанные с использованием критериев в “нестандартных” ситуациях и применением современных технологий в задачах анализа данных.

В разделе 8 обсуждаются проблемы, связанные с влиянием ошибок округления на свойства критериев нормальности, а также предлагаются подходы и средства для решения этих проблем в приложениях.

Большинство таблиц процентных точек (квантилей), необходимых при формировании статистического вывода по соответствующему критерию, для удобства вставлены в параграфы с описанием свойств этого критерия, так же, как и таблицы с оценками мощности. В приложение вынесены лишь наиболее громоздкие таблицы.

1.2. Конкурирующие гипотезы

В данном руководстве при исследовании распределений статистик проверяемой гипотезе H_0 всегда соответствует принадлежность наблюдаемой выборки нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2} \right\}. \quad (1.9)$$

В качестве таких конкурирующих гипотез при исследовании мощности критериев рассматриваются:

конкурирующая гипотеза H_1 соответствует обобщённому нормальному закону (семейству распределений) с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp \left\{ -\left(\frac{|x - \theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right\} \quad (1.10)$$

и параметром формы $\theta_2 = 4$;

гипотеза H_2 – распределению Лапласа с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\theta_1} \exp \{ -|x - \theta_0| / \theta_1 \}, \quad (1.11)$$

гипотеза H_3 – логистическому распределению с плотностью

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \Bigg/ \left[1 + \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \right]^2. \quad (1.12)$$

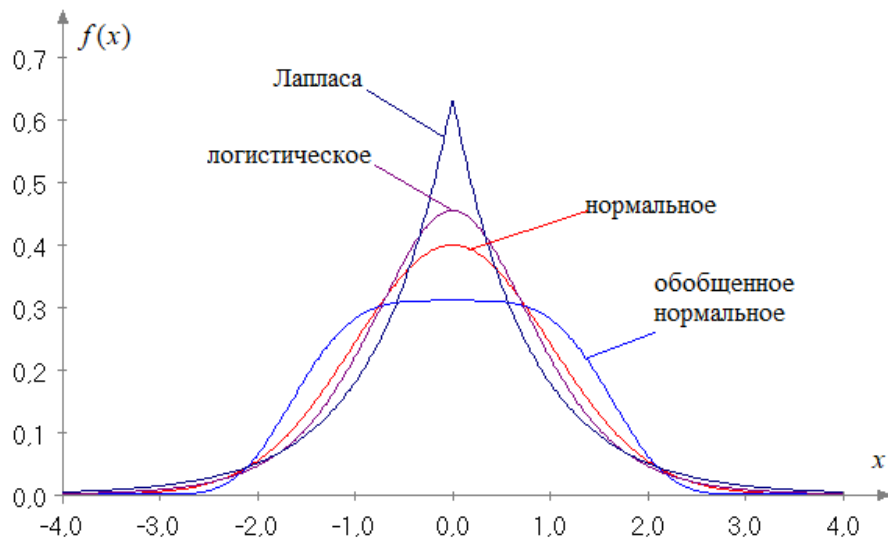


Рис. 1.5. Плотности законов распределения, соответствующие рассматриваемым гипотезам H_0, H_1, H_2, H_3

Для того, чтобы оценить возможности критериев по распознаванию асимметричных альтернатив, в дополнение к H_1 , H_2 и H_3 иногда будут рассматриваться конкурирующие гипотезы H_4 , соответствующая распределению минимального значения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1} \exp \left\{ \frac{x - \theta_0}{\theta_1} - \exp \left(\frac{x - \theta_0}{\theta_1} \right) \right\}, \quad (1.13)$$

где $x \in (-\infty, \infty)$, с параметрами $\theta_0 = 0.38$, $\theta_1 = 0.8$, и H_5 , соответствующая распределению максимального значения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1} \exp \left\{ -\frac{x - \theta_0}{\theta_1} - \exp \left(-\frac{x - \theta_0}{\theta_1} \right) \right\}, \quad (1.14)$$

и параметрами $\theta_0 = -0.38$, $\theta_1 = 0.8$.

При таких значениях параметров плотности (1.13) и (1.14) наиболее близки к плотности стандартного нормального закона. Функции плотности законов, соответствующие H_0 , H_4 и H_5 , представлены на рис. 1.6.

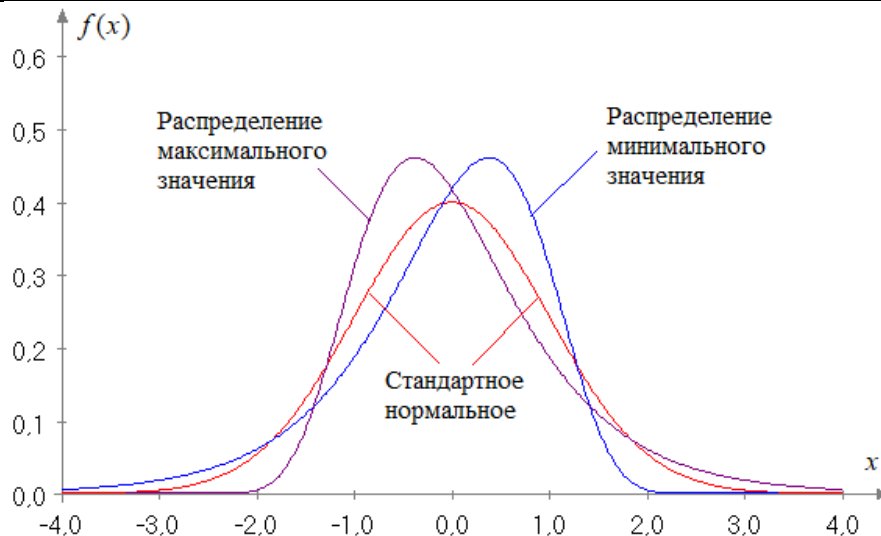


Рис. 1.6. Плотности распределений, соответствующие гипотезам H_0 , H_4 , H_5

Мощность всех критериев исследована относительно указанных конкурирующих гипотез.

2. Специальные критерии проверки отклонения от нормального закона

Множество рассмотренных специальных критериев расширено за счет исследования следующих критериев.

1. Модификация Гелы–Гаствирта критерия проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса (Gel–Gastwirth Test) [41], (2008).
2. Энтропийный критерий нормальности Васичека [87], (1976).
3. Энтропийный критерий Корреа [20], (1995).
4. Энтропийный критерий Ван Эса [86], (1992).
5. Энтропийный критерий Эбрахими [31], (1994).
6. Энтропийные критерии Заманзаде–Аргами [93], (2012).
7. Критерии Локка–Сперриера [65, 66], (1976, 1977).
8. Критерий Мартинеса–Иглевича [67], (1981).
9. Критерий Филлибена [33], (1975).
10. Критерий Шапиро–Франция [76], (1976).
11. Критерий Вайсберга–Бингема [92], (1975).
12. Критерий Q Жанга [98], (1999).
13. Критерий Лина–Мудхолкара [64], (1980).
14. Критерий Чена–Шапиро [16], (2012).
15. Критерий Бонетта–Сейер [11], (2002).
16. Критерий Али-Чорго-Ревеса [1, 2], (1985, 1992).
17. Критерии Бонтемпе–Меддахи [12], (2005).
18. Критерии Десгань–Мишо [26], [27], (2013, 2018).
19. Критерии Оя [70], (1981). Нами предложена модификация (2022).
20. Критерий Чена [17, 18], (2009, 2014).
21. Критерий Брис–Хьюберт–Стройфа [14], (2008).

3. Непараметрические критерии согласия при проверке нормальности

- 3.1. Критерий Колмогорова
- 3.2. Критерий Купера
- 3.3. Критерий Крамера–Мизеса–Смирнова
- 3.4. Критерий Ватсона
- 3.5. Критерий Андерсона–Дарлингга
- 3.6. Критерии Жанга Z_K , Z_C и Z_A .

4. Критерии согласия типа хи-квадрат при проверке нормальности

- 4.1. Критерий согласия χ^2 Пирсона
- 4.2. Критерий согласия Никулина–Рао–Робсона

5. Ранжирование критериев нормальности по мощности

Имея в наличии целый арсенал критериев, специалисту в конкретной области желательно знать, применение каких критериев является предпочтительным. Желательно, чтобы при заданной вероятности α ошибки 1-го рода критерий обеспечивал минимальную вероятность β ошибки 2-го рода. Другими словами, желательно, чтобы критерий обладал максимальной мощностью $1-\beta$ относительно рассматриваемых (близких) конкурирующих законов.

На основании оценок мощности, показанной критериями относительно H_1 , H_2 и H_3 , уже можно отдавать предпочтение тем или иным критериям, отказываясь от тех, которые не зарекомендовали себя способностью, например, отличать от H_0 гипотезы типа H_1 и H_3 .

В таблице 5.1 все рассмотренные критерии проверки нормальности упорядочены по убыванию мощности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 (по величине мощности $1-\beta$, проявленной критериями при $n=50$ и заданном уровне значимости $\alpha=0.1$). Серым цветом в ячейках таблицы, как и ранее, отмечены критерии, для которых в процессе исследования мощности относительно соответствующей гипотезы была выявлена смещенность критерия, то есть при некоторых, как правило, небольших n было обнаружено, что $1-\beta < \alpha$.

Уже то, как зарекомендовал себя соответствующий критерий по мощности относительно соответствующей гипотезы, является определённой характеристикой. Очевидно, что предпочтительней применять критерии, оказавшиеся в верхних частях соответствующих столбцов.

Упорядоченность критериев нормальности по мощностям относительно гипотез $H_1 - H_3$ ($n = 50$, $\alpha = 0.1$)

№	H_1	$1-\beta$	H_2	$1-\beta$	H_3	$1-\beta$
1	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.451	Шпигельхальтера	0.790	Гелы–Гаствирта	0.378
2	Корреа	0.441	Гелы–Гаствирта	0.753	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.366
3	Васичека	0.434	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.752	Хегази–Грина T_2	0.359
4	Эбрахими	0.434	Гаствирта	0.731	Харке–Бера	0.349
5	Д`Агостино Z_2	0.428	Хегази–Грина T_2	0.723	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.349
6	Оя \tilde{T}_{12}	0.406	Гири	0.722	Д`Агостино E_p	0.347
7	Дэвида–Хартли– Пирсона	0.400	Бонетта–Сейер	0.722	Шпигельхальтера	0.343
8	Гири	0.394	Десгань–Мишо X_{APD}	0.705	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.342
9	Бонетта–Сейер	0.394	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.705	Филлибена	0.340
10	Шапиро–Уилка	0.389	Филлибена	0.699	Шапиро–Франция	0.333
11	Гаствирта	0.384	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.695	Вайсберга–Бингема	0.333
12	Чена–Шапиро	0.327	Оя \tilde{T}_{12}	0.694	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.330
13	Хи-квадрат Пирсона	0.311	Шапиро–Франция	0.691	Десгань–Мишо X_{APD}	0.318
14	Десгань–Мишо X_{APD}	0.304	Вайсберга–Бингема	0.691	Мартинеса–Иглевица	0.301

Продолжение таблицы 5.1

№	H_1	1- β	H_2	1- β	H_3	1- β
15	Жанга Z_C	0.300	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.689	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.299
16	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.293	Мартинеса–Иглевича	0.683	Ван Эса	0.298
17	Ватсона	0.293	Хегази–Грина T_1	0.674	Десгань–Мишо Rn	0.287
18	Андерсона–Дарлингга	0.287	Д'Агостино E_p	0.671	Ройстона	0.273
19	Фросини	0.285	Десгань–Мишо Rn	0.670	Гаствирта	0.273
20	Али–Чорго–Ревеса	0.281	Ван Эса	0.667	Гири	0.272
21	Ройстона	0.280	Харке–Бера	0.654	Бонетта–Сейер	0.272
22	Купера	0.279	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.653	Жанга Z_A	0.272
23	Эппса–Пулли	0.275	Али–Чорго–Ревеса	0.643	Жанга Z_C	0.270
24	Десгань–Мишо R_n	0.275	Андерсона–Дарлингга	0.630	Хегази–Грина T_1	0.267
25	Крамера–Мизеса– Смирнова	0.269	Ватсона	0.626	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.255
26	Оя \tilde{T}_{34}	0.262	Эппса–Пулли	0.623	Чена–Шапиро	0.251
27	Мартинеса–Иглевича	0.252	Фросини	0.623	Эппса–Пулли	0.249
28	Никулина–Рао– Робсона	0.240	Крамера–Мизеса– Смирнова	0.621	Жанга Z_K	0.249

№	H_1	$1-\beta$	H_2	$1-\beta$	H_3	$1-\beta$
29	Жанга Z_A	0.239	Ройстона	0.616	Д'Агостино Z_2	0.241
30	Хегази–Грина T_1	0.218	Купера	0.589	Али–Чорго–Ревеса	0.240
31	Бонтемпа–Меддахи BM_{3_6}	0.216	Жанга Z_A	0.578	Андерсона–Дарлингга	0.230
32	Шпигельхальтера	0.211	Чена–Шапиро	0.576	Оя \tilde{T}_{12}	0.228
33	Колмогорова	0.208	Жанга Z_K	0.569	Локка–Сперриера T_{2n}	0.222
34	Жанга Z_K	0.186	Жанга Z_C	0.548	Лина–Мудхолкара	0.216
35	Жанга	0.179	Колмогорова	0.540	Фросини	0.212
36	Д'Агостино E_p	0.164	Оя \tilde{T}_{34}	0.518	Жанга	0.212
37	Ван Эса	0.150	Локка–Сперриера T_{2n}	0.504	Крамера–Мизеса– Смирнова	0.209
38	Шапиро–Франция	0.139	Шапиро–Уилка	0.502	Ватсона	0.204
39	Вайсберга–Бингема	0.139	Дэвида–Хартли– Пирсона	0.499	Шапиро–Уилка	0.203
40	Чена	0.139	Д'Агостино Z_2	0.489	Купера	0.192
41	Филлибена	0.119	Никулина–Рао– Робсона	0.473	Никулина–Рао–Робсона	0.188
42	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.086	Хи-квадрат Пирсона	0.423	Колмогорова	0.181

Окончание таблицы 5.1

№	H_1	1- β	H_2	1- β	H_3	1- β
43	Локка–Сперриера T_{1n}	0.074	Васичека	0.397	Оя \tilde{T}_{34}	0.172
44	Брис–Хьюберт– Стройфа	0.162	Эбрахими	0.396	Локка–Сперриера T_{1n}	0.168
45	Харке–Бера	0.071	Корреа	0.382	Хи-квадрат Пирсона	0.155
46	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.066	Жанга	0.355	Васичека	0.137
47	Хегази–Грина T_2	0.061	Лина–Мудхолкара	0.332	Эбрахими	0.136
48	Лина–Мудхолкара	0.056	Чена	0.292	Корреа	0.132
49	Гелы–Гаствирта	0.004	Локка–Сперриера T_{1n}	0.255	Чена	0.130
50	Локка–Сперриера T_{2n}	0.000	Брис–Хьюберт– Стройфа	0.147	Брис–Хьюберт–Стройфа	0.100

К сожалению, если критерий способен хорошо отличать H_1 от H_0 , это не значит, что он также легко отличает от H_0 гипотезу H_3 или более далёкую гипотезу H_2 . Например энтропийные критерии Васичека, Корреа и Эбрахими показывают высокую мощность относительно H_1 и имеют низкие оценки мощности относительно H_2 и H_3 . А энтропийный критерий Заманзаде–Аргами со статистикой TZ_2 наоборот: низкую мощность относительно H_1 и высокую относительно H_2 и H_3 .

Тем не менее, ориентируясь на таблицу 5.1, можно выделить и наиболее предпочтительные критерии, и наименее предпочтительные критерии, включив в последние критерии, сосредоточенные в нижней части таблицы 5.1. Например, не очень эффективны критерии Чена, Локка–Сперриера T_{1n} , Брис–Хьюберт–Стройфа.

В таблице 5.2 добавлена колонка с полученными оценками мощности критериев относительно гипотезы H_4 , соответствующей асимметричному распределению минимального значения (при $n = 50$ и $\alpha = 0.1$).

Теперь для более однозначных выводов по множеству симметричных и асимметричных альтернатив можно поступить следующим образом.

В убывающем ряду оценок мощности относительно рассматриваемой гипотезы H_i находится ранг этого критерия. В качестве основы для рейтинга можно взять сумму рангов соответствующего критерия: сумму мест “занятых” критерием по величине мощности относительно H_i , $i = \overline{1, 4}$. При упорядочивании критериев по возрастанию суммы, порядковые номера (ранги) этих сумм указывают рейтинг R соответствующего критерия.

При одинаковой сумме мест будут одинаковыми и рейтинги.

Таблица 5.2

Ранжирование критериев нормальности

№	Критерий	Мощность относительно H_i				Место относительно H_i				Σ мест	R
		H_1	H_2	H_3	H_4	H_1	H_2	H_3	H_4		
1	Десгань–Мишо X_{APD}	0.304	0.705	0.318	0.744	14	7.5	13	16.5	51	1
2	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.293	0.695	0.330	0.717	16.5	11	12	20	59.5	2
3	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.451	0.705	0.299	0.356	1	7.5	15	43	66.5	3
4	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.216	0.689	0.342	0.744	31	15	8	16.5	70.5	4
5	Д'Агостино E_p	0.164	0.671	0.347	0.756	36	18	6	12.5	72.5	5
6	Шапиро–Франция	0.139	0.691	0.333	0.760	39.5	13.5	10.5	9.5	73	7.5
7	Вайсберга–Бингема	0.139	0.691	0.333	0.760	39.5	13.5	10.5	9.5	73	7.5
8	Хегази–Грина T_2	0.061	0.723	0.359	0.735	47	5	3	18	73	7.5
9	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.086	0.752	0.366	0.696	43	3	2	25	73	7.5
10	Ройстона	0.280	0.616	0.273	0.776	21	29	18.5	5.5	74	10
11	Филлибена	0.119	0.699	0.340	0.754	42	10	9	14	75	11
12	Чена–Шапиро	0.327	0.576	0.251	0.776	12	32	26	5.5	75.5	12
13	Гельс–Гаствирта	0.004	0.753	0.378	0.699	49	2	1	24	76	13
14	Гаствирта	0.384	0.731	0.273	0.354	11	4	18.5	44	77.5	14

Продолжение таблицы 5.2

№	Критерий	Мощность относительно H_i				Место относительно H_i				Σ мест	R
		H_1	H_2	H_3	H_4	H_1	H_2	H_3	H_4		
15	Жанга Z_C	0.300	0.548	0.270	0.772	15	34	23	7	79	15
16	Гири	0.394	0.722	0.272	0.271	8.5	6.5	21	46	82	16
17	Харке–Бера	0.071	0.654	0.349	0.756	45	21	4.5	12.5	83	17.5
18	Бонетта–Сейер	0.394	0.722	0.272	0.271	8.5	6.5	21	47	83	17.5
19	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.066	0.653	0.349	0.757	46	22	4.5	11	83.5	19
20	Жанга Z_A	0.239	0.578	0.272	0.787	29	31	21	3	84	20
21	Шпигельхальтера	0.211	0.790	0.343	0.320	32	1	7	45	85	21
22	Оя \tilde{T}_{12}	0.406	0.694	0.228	0.455	6	12	32	38.5	88.5	22
23	Хегази–Грина T_1	0.218	0.674	0.267	0.724	30	17	24	19	90	23
24	Эппса–Пулли	0.275	0.623	0.249	0.751	23.5	26.5	27.5	15	92.5	24
25	Мартинеса–Иглевича	0.252	0.683	0.301	0.503	27	16	14	36	93	25
26	Шапиро–Уилка	0.389	0.502	0.203	0.765	10	38	39	8	95	26
27	Али–Чорго–Ревеса	0.281	0.643	0.240	0.702	20	23	30	22.5	95.5	27.5
28	Андерсона–Дарлинга	0.287	0.630	0.230	0.702	18	24	31	22.5	95.5	27.5
29	Десгань–Мишо R_n	0.275	0.670	0.287	0.398	23.5	19	17	42	101.5	29
30	Фросини	0.285	0.623	0.212	0.665	19	26.5	35	27	107.5	30

№	Критерий	Мощность относительно H_i				Место относительно H_i				Σ мест	R
		H_1	H_2	H_3	H_4	H_1	H_2	H_3	H_4		
31	Ван Эса	0.150	0.667	0.298	0.551	38	20	16	34	108	31
32	Ватсона	0.293	0.626	0.204	0.583	16.5	25	38	32	111.5	32
33	Д'Агостино Z_2	0.428	0.489	0.241	0.402	5	40	29	41	115	33
34	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.269	0.621	0.209	0.652	25	28	37	28	118	34
35	Жанга Z_K	0.186	0.569	0.249	0.679	34	33	27.5	26	120.5	35
36	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.400	0.499	0.255	0.172	7	39	25	50	121	36
37	Васичека	0.434	0.397	0.137	0.611	3.5	43.5	46.5	29.5	123	37.5
38	Эбрахими	0.434	0.396	0.136	0.611	3.5	43.5	46.5	29.5	123	37.5
39	Локка–Сперриера T_{2n}	0.000	0.504	0.222	0.786	50	37	33	4	124	39
40	Оя \tilde{T}_{34}	0.262	0.518	0.172	0.715	26	36	43	21	126	40.5
41	Корреа	0.441	0.382	0.132	0.586	2	45	48	31	126	40.5
42	Купера	0.279	0.589	0.192	0.526	22	30	40	35	127	42
43	Лина–Мудхолкара	0.056	0.332	0.216	0.827	48	47	34	1	130	43
44	Хи-квадрат Пирсона	0.311	0.423	0.155	0.455	13	42	45	38.5	138.5	44
45	Локка–Сперриера T_{1n}	0.074	0.255	0.168	0.808	44	49	44	2	139	45
46	Колмогорова	0.208	0.540	0.181	0.564	33	35	42	33	143	46
47	Никулина–Рао–Робсона	0.240	0.473	0.188	0.431	28	41	41	40	150	47
48	Жанга	0.179	0.355	0.212	0.476	35	46	36	37	154	48
49	Чена	0.139	0.292	0.130	0.262	41	48	49	48	186	49.5
50	Брис–Хьюберт–Стройфа	0.162	0.147	0.100	0.247	37	50	50	49	186	49.5

На результаты анализа и предложенное в таблице 5.2 ранжирование (оценки рейтинга) можно ориентироваться в приложениях, отдавая предпочтение применению того или иного критерия для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону.

Вместе с тем из анализа результатов исследований можно сделать не вполне утешительные выводы. Очевидно, что ряд специальных критериев нормальности имеет явное преимущество в мощности по сравнению с используемыми в этих же целях непараметрическими и параметрическими критериями согласия.

Среди специальных критериев есть фавориты, применение которых в приложениях наиболее целесообразно. По-видимому, с осторожностью к таким критериям можно отнести те, рейтинги которых в таблице 5.2 не опускаются ниже 20.

К сожалению, достаточно обширна группа критериев, неспособных при малых n и малых α отличать от H_0 конкурирующие гипотезы типа H_1 .

Если внимательно посмотреть на результаты в таблице 5.2, то можно обратить внимание на то, что нет критерия, который входил бы в группу лидеров по величине мощности относительно каждой из рассмотренных 4-х конкурирующих гипотез, а минимальная сумма мест (Σ) равна 51. Как правило, если критерий обладает высокой мощностью относительно 2-х – 3-х типов конкурирующих гипотез, то очень плохо с мощностью относительно гипотезы 4-го типа (H_1 или H_4). В качестве примера, достаточно глянуть на ситуацию с критериями Десгань–Мишо со статистикой X_{EPD} , Хегази–Грина со статистикой T_2 , Заманзаде–Аргами со статистикой TZ_2 .

Всё это говорит о том, что несмотря на наличие множества критериев, идеального (равномерно наиболее мощного) критерия проверки отклонения от нормального закона нет. В такой ситуации рекомендуется применять такую совокупность критериев, чтобы обеспечить распознавание любой конкурирующей гипотезы.

8. Изменение свойств критериев нормальности вследствие ошибок округления

Под влиянием ошибок округления распределения статистик могут изменяться очень существенно. Это касается и множества критериев, применяемых при проверке нормальности.

В соответствии с оценками рейтинга, представленными в таблице 5.2, критерий Десгань–Мишо со статистикой X_{APD} оказался наиболее предпочтительным (на первой позиции рейтинга) критерием нормальности.

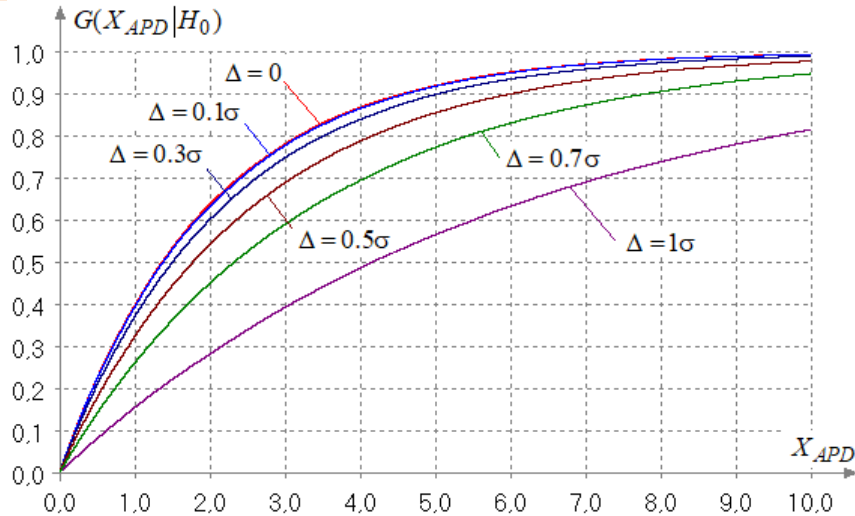


Рис. 8.3. Зависимость от Δ распределения статистики X_{APD} критерия нормальности Десгань–Мишо при справедливости H_0 и $n = 50$

Распределения статистики W_R критерия Ройстона (10-я позиция в рейтинге) ещё более чувствительны к наличию ошибок округления и с ростом Δ быстро отклоняются от асимптотического стандартного нормального закона (рис. 8.4).

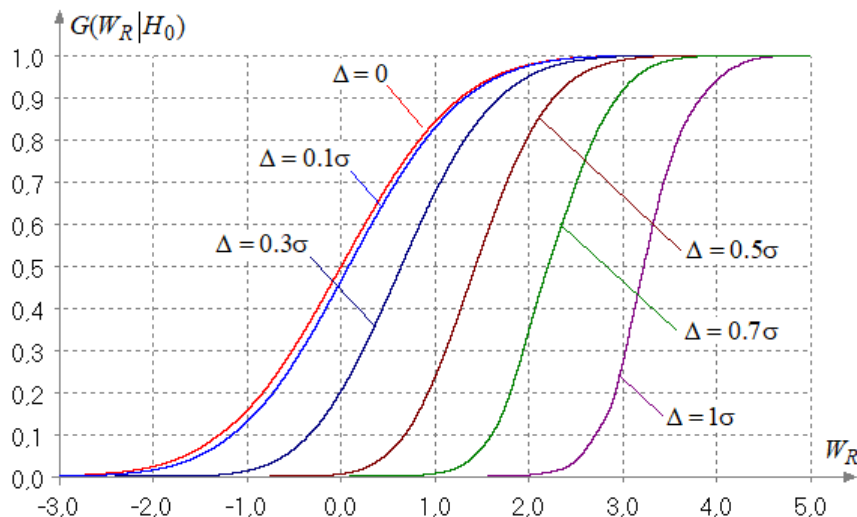


Рис. 8.4. Зависимость от Δ распределения статистики W_R критерия нормальности Ройстона при справедливости H_0 и $n = 50$

Рис. 8.5 демонстрирует изменения распределения статистики Ройстона в зависимости от объёма выборки n при фиксированной ошибке округления $\Delta = 0.1\sigma$. То есть, и при росте Δ , и при росте n распределения $G(W_R|H_0)$ статистики всё дальше отклоняются от асимптотического стандартного нормального закона.

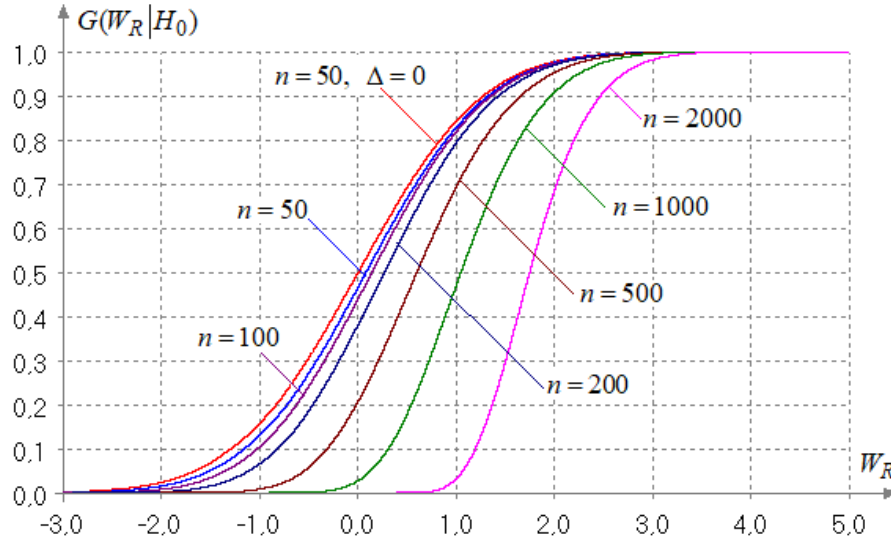


Рис. 8.5. Зависимость распределения статистики W_R критерия нормальности Ройстона от n при справедливости H_0 и $\Delta = 0.1\sigma$

Распределения статистик большинства специальных критериев нормальности зависят от объёмов выборок n . Естественно, при соизмеримости Δ и σ эти распределения зависят от величины Δ .

На рис. 8.6 показано, как меняются распределения статистики (2.32) левостороннего критерия Вайсберга–Биргема при $n=50$ и изменении Δ на интервале от 0 до σ . По мощности этот критерий эквивалентен критерию Шапиро–Франца (2.31) и вместе с последним и ещё двумя критериями занимает позиции 6–9 в таблице 5.2, в которой проранжированы критерии нормальности.

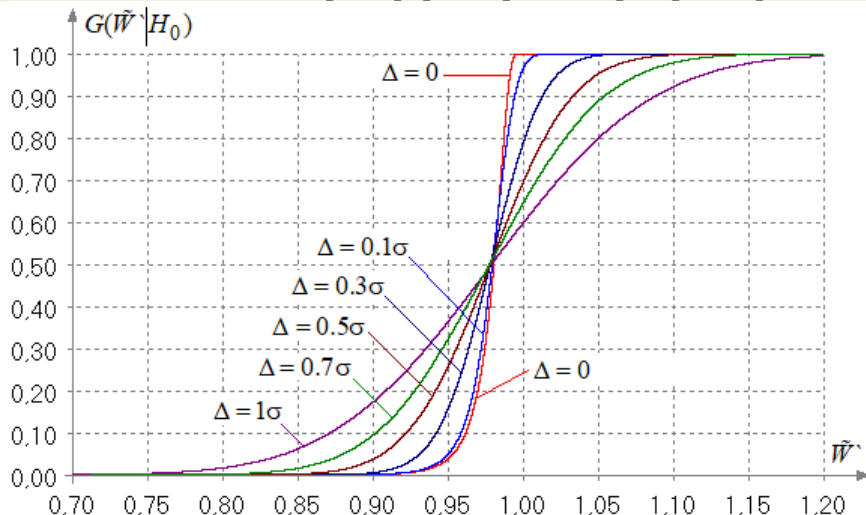


Рис. 8.6. Зависимость от Δ распределения статистики \tilde{W} критерия нормальности Вайсберга–Биргема при справедливости H_0 и $n=50$

Применение критериев нормальности в условиях округления измерений

На MMR-2021 было продемонстрировано, как меняются результаты применения непараметрических критериев согласия при проверке нормальности вследствие ошибок округления на данных из работы Р.Фишера. В данном случае представлены также изменения в результатах применения специальных критериев нормальности.

В работе [34] результаты измерений характеристик ирисов были использованы для решения задачи таксономии. В нашем случае рассмотрим, насколько хорошо ошибки этих измерений описываются нормальными законами распределения. Заимствованные в [34] результаты измерений в сантиметрах представлены в таблице 8.1.

В таблице для каждого из 3-х видов ириса (*Iris setosa*, *Iris versicolor*, *Iris virginica*) представлены измерения 4-х характеристик для 50 представителей каждого вида: S₁ – Sepal length – длина чашелистика, S_w – Sepal width – ширина чашелистика, P₁ – Petal length – длина лепестка, P_w – Petal width – ширина лепестка. Погрешность округления $\Delta=0.1$ одна и та же для всех измерений.

Т а б л и ц а 8.1

Результаты измерений характеристик ирисов

№	Iris setosa				Iris versicolor				Iris virginica			
	S ₁	S _w	P ₁	P _w	S ₁	S _w	P ₁	P _w	S ₁	S _w	P ₁	P _w
1	5.1	3.5	1.4	0.2	7.0	3.2	4.7	1.4	6.3	2.2	6.0	2.5
2	4.9	3.0	1.4	0.2	6.4	3.2	4.5	1.5	5.8	2.5	5.1	1.9
3	4.7	3.2	1.3	0.2	6.9	3.1	4.9	1.5	7.1	2.5	5.9	2.1
4	4.6	3.1	1.5	0.2	5.5	2.3	4.0	1.3	6.3	2.5	5.6	1.8
5	5.0	3.6	1.4	0.2	6.5	2.8	4.6	1.5	6.5	2.5	5.8	2.2
6	5.4	3.9	1.7	0.4	5.7	2.8	4.5	1.3	7.6	2.6	6.6	2.1

Результаты измерений характеристик ирисов

№	<i>Iris setosa</i>				<i>Iris versicolor</i>				<i>Iris virginica</i>			
7	4.6	3.4	1.4	0.3	6.3	3.3	4.7	1.6	4.9	2.6	4.5	1.7
8	5.0	3.4	1.5	0.2	4.9	2.4	3.3	1.0	7.3	2.7	6.3	1.8
9	4.4	2.9	1.4	0.2	6.6	2.9	4.6	1.3	6.7	2.7	5.8	1.8
10	4.9	3.1	1.5	0.1	5.2	2.7	3.9	1.4	7.2	2.7	6.1	2.5
11	5.4	3.7	1.5	0.2	5.0	2.0	3.5	1.0	6.5	2.7	5.1	2.0
12	4.8	3.4	1.6	0.2	5.9	3.0	4.2	1.5	6.4	2.8	5.3	1.9
13	4.8	3.0	1.4	0.1	6.0	2.2	4.0	1.0	6.8	2.8	5.5	2.1
14	4.3	3.0	1.1	0.1	6.1	2.9	4.7	1.4	5.7	2.8	5.0	2.0
15	5.8	4.0	1.2	0.2	5.6	2.9	3.6	1.3	5.8	2.8	5.1	2.4
16	5.7	4.4	1.5	0.4	6.7	3.1	4.4	1.4	6.4	2.8	5.3	2.3
17	5.4	3.9	1.3	0.4	5.6	3.0	4.5	1.5	6.5	2.8	5.5	1.8
18	5.1	3.5	1.4	0.3	5.8	2.7	4.1	1.0	7.7	2.8	6.7	2.2
19	5.7	3.8	1.7	0.3	6.2	2.2	4.5	1.5	7.7	2.8	6.9	2.3
20	5.1	3.8	1.5	0.3	5.6	2.5	3.9	1.1	6.0	2.9	5.0	1.5
21	5.4	3.4	1.7	0.2	5.9	3.2	4.8	1.8	6.9	2.9	5.7	2.3
22	5.1	3.7	1.5	0.4	6.1	2.8	4.0	1.3	5.6	3.0	4.9	2.0
23	4.6	3.6	1.0	0.2	6.3	2.5	4.9	1.5	7.7	3.0	6.7	2.0
24	5.1	3.3	1.7	0.5	6.1	2.8	4.7	1.2	6.3	3.0	4.9	1.8
25	4.8	3.4	1.9	0.2	6.4	2.9	4.3	1.3	6.7	3.0	5.7	2.1
26	5.0	3.0	1.6	0.2	6.6	3.0	4.4	1.4	7.2	3.0	6.0	1.8
27	5.0	3.4	1.6	0.4	6.8	2.8	4.8	1.4	6.2	3.0	4.8	1.8

Результаты измерений характеристик ирисов

№	Iris setosa				Iris versicolor				Iris virginica			
	28	5.2	3.5	1.5	0.2	6.7	3.0	5.0	1.7	6.1	3.0	4.9
29	5.2	3.4	1.4	0.2	6.0	2.9	4.5	1.5	6.4	3.0	5.6	2.1
30	4.7	3.2	1.6	0.2	5.7	2.6	3.5	1.0	7.2	3.0	5.8	1.6
31	4.8	3.1	1.6	0.2	5.5	2.4	3.8	1.1	7.4	3.0	6.1	1.9
32	5.4	3.4	1.5	0.4	5.5	2.4	3.7	1.0	7.9	3.0	6.4	2.0
33	5.2	4.1	1.5	0.1	5.8	2.7	3.9	1.2	6.4	3.0	5.6	2.2
34	5.5	4.2	1.4	0.2	6.0	2.7	5.1	1.6	6.3	3.1	5.1	1.5
35	4.9	3.1	1.5	0.2	5.4	3.0	4.5	1.5	6.1	3.1	5.6	1.4
36	5.0	3.2	1.2	0.2	6.0	3.4	4.5	1.6	7.7	3.1	6.1	2.3
37	5.5	3.5	1.3	0.2	6.7	3.1	4.7	1.5	6.3	3.1	5.6	2.4
38	4.9	3.6	1.4	0.1	6.3	2.3	4.4	1.3	6.4	3.2	5.5	1.8
39	4.4	3.0	1.3	0.2	5.6	3.0	4.1	1.3	6.0	3.2	4.8	1.8
40	5.1	3.4	1.5	0.2	5.5	2.5	4.0	1.3	6.9	3.2	5.4	2.1
41	5.0	3.5	1.3	0.3	5.5	2.6	4.4	1.2	6.7	3.2	5.6	2.4
42	4.5	2.3	1.3	0.3	6.1	3.0	4.6	1.4	6.9	3.2	5.1	2.3
43	4.4	3.2	1.3	0.2	5.8	2.6	4.0	1.2	5.8	3.3	5.1	1.9
44	5.0	3.5	1.6	0.6	5.0	2.3	3.3	1.0	6.8	3.3	5.9	2.3
45	5.1	3.8	1.9	0.4	5.6	2.7	4.2	1.3	6.7	3.3	5.7	2.5
46	4.8	3.0	1.4	0.3	5.7	3.0	4.2	1.2	6.7	3.4	5.2	2.3
47	5.1	3.8	1.6	0.2	5.7	2.9	4.2	1.3	6.3	3.4	5.0	1.9
48	4.6	3.2	1.4	0.2	6.2	2.9	4.3	1.3	6.5	3.6	5.2	2.0
49	5.3	3.7	1.5	0.2	5.1	2.5	3.0	1.1	6.2	3.8	5.4	2.3
50	5.0	3.3	1.4	0.2	5.7	2.8	4.1	1.3	5.9	3.8	5.1	1.8

Вследствие округления результатов измерений в столбцах таблицы 8.1 наблюдаются повторяющиеся значения. Посмотрим, как это отражается на результатах проверки гипотезы о принадлежности измерений характеристик ирисов нормальному закону.

Результаты проверки принадлежности всех 12-и выборок нормальным законам по 8-и рассматриваемым критериям согласия (Колмогорова (K), Крамера–Мизеса–Смирнова (CMS), Андерсона–Дарлинга (AD), Купера (Ku), Ватсона (W), Жанга (Z_A, Z_C и Z_K)) и 6-и специальным критериям (Бонтемпа–Меддахи со статистикой BM_{3-6} (BM), Десгань–Мишо со статистикой X_{APD} (DM), Филлибена (Fb), Гири (Gr), Ройстона (Rn), Вайсберга–Биргема (WB)) для каждого из 3-х видов ириса представлены в таблицах 8.2–8.4.

Т а б л и ц а 8.2

Проверка гипотез о принадлежности нормальному закону характеристик для *Iris setosa*

Test	Sepal length			Sepal width			Petal length			Petal width		
	$\mu = 5.006, \sigma = 0.3489$			$\mu = 3.428, \sigma = 0.3753$			$\mu = 1.462, \sigma = 0.1719$			$\mu = 0.246, \sigma = 0.1043$		
	S	Pvalue		S	Pvalue		S	Pvalue		S	Pvalue	
		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$
K	0.828	0.106	0.479	0.758	0.192	0.614	1.102	0.006	0.521	2.501	0.000	0.000
CMS	0.071	0.269	0.659	0.074	0.248	0.558	0.187	0.009	0.429	0.982	0.000	0.0001
AD	0.414	0.339	0.731	0.484	0.231	0.496	0.999	0.013	0.522	4.747	0.000	0.0001
Ku	1.511	0.047	0.388	1.420	0.086	0.485	2.110	0.000	0.343	4.148	0.000	0.0004
W	0.070	0.229	0.627	0.072	0.217	0.540	0.188	0.004	0.402	0.940	0.000	0.0001
Z_A	3.312	0.636	0.828	3.356	0.148	0.220	3.365	0.107	0.520	3.706	0.000	0.001
Z_C	5.643	0.518	0.689	6.690	0.376	0.515	8.390	0.216	0.756	41.661	0.0002	0.002
Z_K	1.175	0.262	0.630	1.168	0.078	0.249	0.206	0.019	0.610	12.067	0.000	0.000
BM	0.374	0.924	0.928	2.799	0.282	0.288	3.525	0.196	0.221	16.154	0.010	0.020
DM	0.243	0.884	0.893	2.108	0.345	0.370	3.410	0.169	0.299	17.185	0.000	0.022
Fb	0.991	0.543	0.833	0.981	0.110	0.191	0.974	0.033	0.365	0.891	0.000	0.001
Gr	0.776	0.371	0.351	0.766	0.227	0.218	0.765	0.219	0.156	0.791	0.692	0.120
Rn	0.102	0.462	0.735	0.608	0.273	0.461	1.600	0.055	0.611	4.782	0.000	0.0005
WB	0.982	0.537	0.547	0.964	0.119	0.283	0.949	0.035	0.278	0.795	0.000	0.011

Таблица 8.3

Проверка гипотез о принадлежности нормальному закону характеристик для *Iris versicolor*

Критерий Test	Sepal length			Sepal width			Petal length			Petal width		
	$\mu = 5.936, \sigma = 0.5110$			$\mu = 2.770, \sigma = 0.3106$			$\mu = 4.260, \sigma = 0.4652$			$\mu = 1.3260, \sigma = 0.1958$		
	S	Pvalue		S	Pvalue		S	Pvalue		S	Pvalue	
		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$
K	0.716	0.265	0.557	0.888	0.061	0.415	0.860	0.079	0.259	1.065	0.010	0.453
CMS	0.059	0.395	0.602	0.105	0.094	0.345	0.091	0.147	0.262	0.154	0.023	0.467
AD	0.374	0.421	0.613	0.573	0.139	0.450	0.562	0.149	0.254	0.975	0.015	0.319
Ku	1.282	0.199	0.519	1.403	0.097	0.678	1.252	0.232	0.623	1.886	0.001	0.432
W	0.057	0.362	0.576	0.098	0.093	0.373	0.076	0.191	0.359	0.153	0.014	0.451
Z_A	3.313	0.624	0.717	3.320	0.500	0.742	3.354	0.155	0.201	3.387	0.050	0.214
Z_C	6.214	0.441	0.515	5.900	0.483	0.691	8.593	0.203	0.256	12.31	0.055	0.226
Z_K	0.849	0.520	0.742	1.348	0.176	0.568	1.285	0.204	0.399	2.563	0.008	0.283
BM	1.168	0.639	0.644	2.464	0.333	0.343	4.062	0.151	0.154	0.913	0.721	0.744
DM	0.682	0.708	0.716	2.379	0.302	0.340	3.771	0.150	0.164	0.119	0.942	0.955
Fb	0.992	0.640	0.781	0.988	0.351	0.679	0.984	0.168	0.239	0.976	0.052	0.342
Gr	0.825	0.444	0.482	0.820	0.548	0.658	0.815	0.674	0.726	0.803	0.986	0.786
Rn	0.089	0.468	0.594	0.418	0.340	0.658	1.014	0.156	0.229	1.922	0.027	0.243
WB	0.984	0.620	0.597	0.976	0.346	0.471	0.968	0.166	0.306	0.953	0.047	0.283

Таблица 8.4

Проверка гипотез о принадлежности нормальному закону характеристик для *Iris virginica*

Критерий Test	Sepal length			Sepal width			Petal length			Petal width		
	$\mu = 6.5880, \sigma = 0.6295$			$\mu = 2.9740, \sigma = 0.3193$			$\mu = 5.552, \sigma = 0.5463$			$\mu = 2.0260, \sigma = 0.2719$		
	S	Pvalue		S	Pvalue		S	Pvalue		S	Pvalue	
		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$
K	0.841	0.095	0.202	0.925	0.042	0.314	0.843	0.092	0.238	0.895	0.057	0.504
CMS	0.089	0.155	0.210	0.106	0.093	0.313	0.087	0.165	0.250	0.121	0.059	0.308
AD	0.557	0.153	0.204	0.611	0.112	0.355	0.619	0.108	0.159	0.760	0.048	0.245
Ku	1.331	0.151	0.336	1.744	0.008	0.170	1.322	0.159	0.411	1.746	0.008	0.259
W	0.085	0.140	0.198	0.102	0.081	0.308	0.074	0.201	0.322	0.121	0.044	0.273
Z_A	3.332	0.334	0.377	3.342	0.238	0.389	3.356	0.146	0.175	3.356	0.146	0.296
Z_C	6.711	0.373	0.420	7.263	0.314	0.486	9.466	0.148	0.178	9.737	0.133	0.275
Z_K	1.306	0.194	0.296	1.496	0.124	0.439	1.554	0.107	0.201	2.076	0.028	0.230
BM	1.605	0.514	0.517	2.839	0.276	0.285	3.994	0.156	0.157	1.475	0.550	0.560
DM	0.824	0.660	0.667	2.762	0.249	0.283	3.038	0.216	0.228	1.233	0.536	0.579
Fb	0.985	0.220	0.267	0.982	0.116	0.244	0.983	0.137	0.176	0.983	0.147	0.396
Gr	0.798	0.871	0.854	0.759	0.152	0.146	0.805	0.938	0.970	0.839	0.200	0.317
Rn	0.649	0.259	0.316	0.912	0.181	0.389	1.238	0.108	0.144	1.360	0.088	0.268
WB	0.971	0.221	0.324	0.964	0.122	0.309	0.965	0.131	0.240	0.966	0.136	0.350

Для каждой выборки в таблицах приводятся ОМП параметров μ и σ нормального закона и вычисленные значения S статистик применяемых критериев. Значения достигнутого уровня значимости p_{value} в предположении об отсутствии ошибок округления (при $\Delta = 0$) для критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона, Десгань–Мишо и Ройстона могут быть рассчитаны по известным асимптотическим распределениям статистик. Но распределения $G(S_n | H_0)$ статистик остальных критериев зависят от n . Для чистоты эксперимента оценки p_{value} в отсутствие ошибок округления (при $\Delta = 0$) находились по распределениям статистик $G(S_n | H_0)$, моделируемым при $n = 50$.

Оценки p_{value} в условиях влияния ошибок округления (при $\Delta = 0.1$ и при соответствующей ОМП для σ) вычислялись по реальным распределениям $G(S_n | H_0)$ статистик критериев, моделируемым в интерактивном режиме. Такая возможность реализована в [146].

Как можно видеть, оценки p_{value} , вычисленные по реальным распределениям $G(S_n | H_0)$ статистик, имеющих место в условиях наличия ошибок округления ($\Delta = 0.1$), кардинально отличаются от значений p_{value} , вычисленных по распределениям статистик этих же критериев в условиях отсутствия ошибок округления ($\Delta = 0$). И если пренебречь влиянием ошибок округления на распределения статистик критериев, то во многих случаях гипотеза о нормальности будет несправедливо отклоняться.

В данном случае надо обратить внимание на то, что каждой проверке по каждому применяемому критерию при ($\Delta = 0.1$ и $n = 50$) соответствует своё распределение статистики $G(S_n | H_0)$, зависящее от σ нормального закона. То есть, для анализа 12 выборок по каждому из 14 критериев мы должны использовать 12 различных распределений $G(S_{50} | H_0)$ статистики применяемого критерия, по которому и вычисляется p_{value} .

Следует сделать ещё одно важное замечание. Среди специальных критериев нормальности есть правосторонние, левосторонние и двусторонние критерии. Вследствие влияния ошибок округления распределения статистик правосторонних критериев сдвигаются вправо, а левосторонних – влево. При этом реальный достигнутый уровень значимости p_{value} , учитывающий влияние Δ , всегда оказывается не меньше того, что мы имеем при его вычислении без учёта такого влияния.

В случае двусторонних критериев вследствие влияния Δ область определения статистик критериев также меняется: при этом она может изменяться по масштабу и сдвигаться влево или вправо. Поэтому реальный p_{value} , учитывающий влияние Δ и вычисляемый в соответствии с (1.5), может возрастать, а может и уменьшаться. Чтобы подчеркнуть этот факт, в строках таблиц 8.2-8.4 для двустороннего критерия Гири ситуации с уменьшением p_{value} из-за влияния Δ выделены цветом.

Библиографический список

1. *Aly E.E.* Quadratic nuisance parameter-free goodness-of-fit tests in the presence of location and scale parameters [Text] / E. Aly, M. Csorgo // Canadian Journal of Statistics. – 1985. – Vol. 13. – P. 53–70.
2. *Aly E.E.* On some goodness-of-fit tests for the normal, logistic and extreme-value distributions [Text] / E.E. Aly, M.A. Shayib // Communications in Statistics - Theory and Methods. – 1992. – Vol. 21. No. 5. – P. 1297–1308.
3. *Anderson T.W.* Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes [Text] / T.W. Anderson, D.A. Darling // AMS. – 1952. – Vol. 23. – P. 193–212.
4. *Anderson T.W.* A test of goodness of fit [Text] / T.W. Anderson, D.A. Darling // J. Amer. Statist. Assoc. – 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.
5. *Baringhaus L.* A consistent test for multivariate normality based on the empirical characteristic function [Text] / L. Baringhaus, N. Henze // Metrika. – 1988. – No. 35. – P. 339–348.
6. *Baringhaus L.* Recent and classical tests for normality – A comparative study [Text] / L. Baringhaus, R. Dauschke, N. Henze // Comm. Statistic. – 1989. – No. 18(1). – P. 363–379.
7. Biometrika tables for Statisticians [Text] / ed. by E.S. Pearson, H.O. Hartley. – 3rd ed. – Cambridge : University Press, 1966. – Vol. 1. – 264 p.
8. Biometrika tables for Statisticians [Text] / ed.: E.S. Pearson, H.O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1972. – Vol. 2. – 385 p.
9. Biometrika tables for Statisticians [Text] / ed.: E.S. Pearson, H.O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1976. – Vol. 2. – 286 p.
10. *Blom G.* Statistical estimates and transformed beta-variables : Doctoral thesis [Text] / G. Blom. – Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1958.
11. *Bonett D.G.* A test of normality with high uniform power [Text] / D.G. Bonett, E. Seier // Computational statistics & Data analysis. – 2002. – Vol. 40. – No. 3. – P. 435–445.
12. *Bontemps C.* Testing Normality: A GMM Approach [Text] / C. Bontemps, N. Meddahi // Journal of Econometrics. – 2005. – Vol. 124. – No. 1. – P. 149–186.

13. *Bowmann K.O.* ‘Omnibus’ test contours for departures from normality based on $\left|\sqrt{b_1}\right|$, b_2 [Text] / K.O. Bowman, L.R. Shenton // *Biometrika*. – 1975. – Vol. 62. – P. 243–250.
14. *Brys G.* Goodness-of-fit Tests Based on a Robust Measure of Skewness [Text] / G. Brys, M. Hubert, A. Struyf // *Computational Statistics*. – 2008. – Vol. 23. – No. 3. – P. 429–442.
15. *Brys G.* A robust measure of skewness [Text] / G. Brys, M. Hubert, A. Struyf // *Journal of Computational and Graphical Statistics*. – 2004. – Vol. 13. – No. 4. – P. 996–1017.
16. *Chen L.* An alternative test for normality based on normalized spacings [Text] / L. Chen, S.S. Shapiro // *Journal of Statistical and Simulation*. – 2012. – Vol. 53. – P. 269–288.
17. *Chen Z.* An alternative test for uniformity [Text] / Z. Chen, C. Ye // *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*. – 2009. – Vol. 16. – No. 4. – P. 343–356.
18. *Chen Z.* Goodness-of-Fit Test Based on Arbitrarily Selected Order Statistics [Text] / Z. Chen // *Mathematics and Statistics*. – 2014. – Vol. 2. – No. 2. – P. 72–77.
19. *Chernoff H.* The use of maximum likelihood estimates in χ^2 test for goodness of fit [Text] / H. Chernoff, E.L. Lehmann // *Ann. Math. Stat.* – 1954. – Vol. 25. – P. 579–586.
20. *Correa J.C.* A new estimator of entropy [Text] / J.C. Correa // *Communication in Statistics – Theory and Methods*. – 1995. – Vol. 24. – No. 10. – P. 2439–2449.
21. *D’Agostino R.B.* Transformation to normality of the null distribution of g_1 / R.B. D’Agostino // *Biometrika*. – 1970. – Vol. 57. – P. 679–681.
22. *D’Agostino R.B.* Simulation probability points of b_2 for small samples [Text] / R.B. D’Agostino, G.L. Tietjen // *Biometrika*. – 1971. – Vol. 58. – P. 669–672.
23. *David H.A.* The distribution of the ratio? In a single normal sample, of range to standard deviation [Text] / H.A. David, H.O. Hartley, E.S. Pearson // *Biometrika*. – 1964. – Vol. 51.2. – No. 3–4. – P. 484–487.
24. *Deidda R.* Sensitivity of goodness-of-fit statistics to rainfall data rounding off [Text] / R. Deidda, M. Puliga // *Physics and Chemistry of the Earth*. – 2006. – Vol. 31. – P. 1240–1251.
25. Design of experiments and statistical analysis for grouped observations [Text]: monograph / V.I. Denisov, K.-H. Eger, B.Yu. Lemesenko, E.B. Tsoy. – Novosibirsk : NSTU Publishing house, 2004. – 464 p.
26. *Desgagne A.* Test of Normality Against Generalized Exponential Power Alternatives [Text] / A. Desgagne, P.L. de Micheaux, A. Leblanc // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. – 2013. – Vol. 42. – No. 1. – P. 164–190.

27. *Desgagne A.* A Powerful and Interpretable Alternative to the Jarque–Bera Test of Normality Based on 2nd-power Skewness and Kurtosis, Using the Rao's Score Test on the APD Family [Text] / A. Desgagne, P.L. de Micheaux // Journal of Applied Statistics. – 2018. – Vol. 45. – No. 13. – P. 2307–2327.
28. *Dong L.B.* An Empirical Likelihood Ratio Test for Normality [Text] / L.B. Dong, D.E.A. Giles // Communications in Statistics – Simulation and Computation, 2007. – Vol.36. – No. 1. – P.197–215.
29. *Doornik J.A.* An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality [Electronic resource] / J.A. Doornik, H. Hansen // Discussion Paper. – Oxford: Nuffield College, 1994. – No. W4&91. – URL: <http://www.nuff.ox.ac.uk/users/Doornik/papers/normal2.pdf>. – Загл. с экрана.
30. *Doornik J.A.* An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality / J.A. Doornik, H. Hansen // Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 2008. – Vol.70, – P.927–939.
31. *Ebrahimi N.* Two measures of sample entropy [Text] / N. Ebrahimi, K. Pflughoeft, E.S. Soofi // Statistics & Probability Letters. – 1994. – Vol. 20. – No. 3. – P. 225–234.
32. *Epps T. W.* A test for normality based on the empirical characteristic function [Text] / T.W. Epps, L.B. Pulley // Biometrika. – 1983. – Vol. 70. – P. 723–726.
33. *Filliben J.J.* The Probability Plot Correlation Coefficient Test for Normality [Text] / J.J. Filliben // Technometrics. – 1975. Vol. 17. – No. 1. – P.111–117.
34. *Fisher R.A.* The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems [Text] / R.A. Fisher // Annals of Eugenics. – 1936. – Vol. 7. – P. 179–188.
35. *Frosini B.V.* A survey of a class of goodness-of-fit statistics [Text] / B.V. Frosini // Metron. – 1978. – Vol. 36. – No. 1–2. – P. 3–49.
36. *Frosini B.V.* On the distribution and power of goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric applications, “Goodness-of-fit” [Text] / B.V. Frosini, F.E. Grubbs ; ed. by P. Revesz, K. Sarkadi, P.K. Sen. – Amsterdam – Oxford – New York : North Holland Publ. Comp, 1987. – P. 133–154.
37. *Geary R.C.* The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality [Text] / R.C. Geary // Biometrika. – 1935. – Vol. 27. – P. 310–322.
38. *Geary R.C.* Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples / R.C. Geary // Biometrika. – 1936. – Vol. 28. – P. 295–307.
39. *Geary R.C.* Testing for Normality [Text] / R.C. Geary // Biometrika. – 1937. – Vol. 34. – P. 209–242.
40. *Gel Y.R.* Robust directed tests of normality against heavy-tailed alternatives [Text] / Y.R. Gel, W. Miao, J.L. Gastwirth // Computational Statistics & Data Analysis. – 2007. – Vol. 51. – No. 5. – P. 2734–2746.

-
41. *Gel Y.R.* A robust modification of the Jarque–Bera test of normality [Text] / Y.R. Gel, J.L. Gastwirth // *Economics Letters*. – 2008. – Vol. 99. – No. 1. – P. 30–32.
42. *Greenwood P.E.* A guide to chi-squared testing [Text] / P.E. Greenwood, M.S. Nikulin. – New York : John Wiley & Sons, 1996. – 280 p.
43. *Grzegorzewski P.* Entropy-based goodness-of-fit test for exponentiality [Text] / P. Grzegorzewski, R. Wieczorkowski // *Communication in Statistics – Theory and Methods*. – 1999. – Vol. 28. – P. 1183–1202.
44. *Harter H.L.* Expected values of normal order statistics [Text] / H.L. Harter // *Biometrika*. – 1961. – Vol. 48. – No. 1–2. – P. 151–165.
45. *Hegazy Y.A.S.* Some new goodness-of-fit tests using order statistics [Text] / Y.A.S. Hegazy, J.R. Green // *Applied Statistics*. – 1975. – Vol. 24. – No. 3. – P. 299–308.
46. *Henze N.* An approximation to the limit distribution of the Epps-Pulley test statistic for normality [Text] / N. Henze // *Metrika*. – 1990. – Vol. 37. – P. 7–18.
47. *Jarque C.M.* Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals [Text] / C.M. Jarque, A.K. Bera // *Economics Letters*. – 1980. – Vol. 6. No. 3. – P. 255–259.
48. *Jarque C.M.* Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals: Monte Carlo evidence [Text] / C.M. Jarque, A.K. Bera // *Economics Letters*. – 1981. – Vol. 7. № 4. – P. 313–318.
49. *Kolmogoroff A. N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione [Text] / A.N. Kolmogoroff // *G. Ist. Ital. atuar.* – 1933. – Vol. 4. – No. 1. – P. 83–91.
50. *Kuiper N.H.* Tests concerning random points on a circle [Text] / N.H. Kuiper // *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Van Wetenschappen. Series A*. – 1960. – Vol. 63. – P.38–47.
51. *Lemeshko B.Yu.* The power of goodness of fit tests for close alternatives [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // *Measurement Techniques*, 2007. – Vol. 50. No. 2. – P. 132–141.
52. *Lemeshko B.Yu.* Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. P. 1 [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko // *Measurement Techniques*. – 2009. – Vol. 52., No. 6. – P. 555–565.
53. *Lemeshko B.Yu.* Analysis of the Power of Goodness-of-Fit Tests for Near Competing Hypotheses. I. The Verification of Simple Hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2009. – Vol. 3. – No. 4. – P. 462–475.
54. *Lemeshko B.Yu.* Comparative analysis of the power of goodness-of-fit tests for near competing hypotheses. II. Verification of complex hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2010. – Vol. 4. – No. 1. – P. 79–93.

-
55. *Lemeshko B.Yu.* Statistic Distribution Models for Some Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Testing Composite Hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2010. – Vol. 39. – No. 3. – P. 460–471.
56. *Lemeshko B.Yu.* Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference”. – Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. – P. 19–27.
57. *Lemeshko B.Yu.* Application of nonparametric goodness-of-fit tests for composite hypotheses in case of unknown distributions of statistics [Text] / A.A. Gorbunova, B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Proceedings of the International Workshop “Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control”. – Novosibirsk, 25–27 September 2013. – P. 8–24.
58. *Lemeshko B.Yu.* Interactive investigation of statistical regularities in testing composite hypotheses of goodness of fit [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis: monograph. Chap. 5. – Wiley-ISTE, 2013. – P. 61–76.
59. *Lemeshko B.Yu.* Application and Power of the Nonparametric Kuiper, Watson, and Zhang Tests of Goodness-of-Fit [Text] / B.Yu. Lemeshko, A.A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56, – No. 5. – P.465–475.
60. *Lemeshko B.Yu.* Application of nonparametric Kuiper and Watson tests of goodness-of-fit for composite hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, A.A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56. – No. 9. – P.965–973.
61. *Lemeshko B.Yu.* Solving problems of using some nonparametric goodness-of-fit tests [Text] / B.Yu. Lemeshko, A.A. Gorbunova, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2014. – Vol. 50. – No. 1. – P.21–35.
62. *Lemeshko B.Y.* About the effect of rounding on the properties of tests for testing statistical hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1715. – No. 012063.
63. *Lilliefors H.W.* On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown [Text] / H.W. Lilliefors // J. Am. Statist. Assoc. – 1967. – Vol. 62. – P. 399–402.
64. *Lin Ch.-Ch.* A simple test for normality against asymmetric alternatives [Text] / Ch.-Ch. Lin, G.S. Mudholkar // Biometrika. – 1980. – Vol. 67. – No. 2. – P. 455–461.
65. *Locke C., Spurrier J. D.* The use of U-statistics for testing normality against nonsymmetrical alternative // Biometrika. – 1976. – Vol. 63, No. 1. – P. 143–147.
66. *Locke C.* The use of U-statistics for testing normality against alternatives with both tails heavy or both tails light [Text] / C. Locke, J.D. Spurrier // Biometrika. – 1977. – Vol. 64. – No. 3. – P. 638–640.

-
67. *Martinez J.* A test for departure from normality based on a biweight estimator of scales [Text] / J. Martinez, B. Iglewicz // *Biometrika*. – 1981. – Vol. 68. – No. 1. – P. 331–333.
68. *Martynov G.* Weighted Cramer-von Mises Test with Estimated Parameters [Text] / G. Martynov // *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 2011. – Vol. 40. – No. 19–20. – P. 3569–3586.
69. *Millikan R.A.* On the elementary electrical charge and the Avogadro constant [Text] / R.A. Millikan // *The Physical Review. Series II*. – 1913. – P.109–143.
70. *Oja H.* Two location and scale-free goodness-of-fit tests [Text] / H. Oja // *Biometrika*. – 1981. – Vol. 68. – No. 3. – P. 637–640.
71. *Oja H.* New tests for normality [Text] / H. Oja // *Biometrika*. – 1983. – Vol. 70. – No. 1. – P. 297–299.
72. *Pearson E.S.* Test for departure from normality: Comparison of powers [Text] / E.S. Pearson, R.B. D’Agostino, K.O. Bowmann // *Biometrika*. – 1977. – Vol. 64. – P. 231–246.
73. *Rao K.C.* A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family [Text] / K.C. Rao, D.S. Robson // *Commun. Statist.* – 1974. – Vol. 3. – P. 1139–1153.
74. *Royston J. P.* Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality [Text] / J.P. Royston // *Statistics and Computing*. – 1992. – Vol. 2. – No. 3. – P. 117–119.
75. *Scott W.F.* Tables for the Lilliefors and Modified Cramer–von Mises tests of normality [Text] / W.F. Scott, B. Stewart // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. – 2011. – Vol.40. – No. 4. – P.726–730.
76. *Shapiro S.S.* An analysis of variance test for normality (complete samples) [Text] / S.S. Shapiro, M.B. Wilk // *Biometrika*. – 1965. – Vol. 52. – P. 591–611.
77. *Shapiro S.S.* Goodness-of fit tests [Text] / S.S. Shapiro, M.B. Wilk, C.J. Chen // *Journal of the American statistical Association*. – 1968. – Vol. 63. – P. 1343–1372.
78. *Shapiro S.S.* An approximate analysis of variance test for normality [Text] / S.S. Shapiro, R.S. Francia // *Journal of the American statistical Association*. – 1972. – Vol. 67. – No. 337. – P. 215–216.
79. *Spiegelhalter D.J.* A test for normality against symmetric alternatives [Text] / D.J. Spiegelhalter // *Biometrika*. – 1977. – Vol. 64. – No. 2. – P. 415–418.
80. *Stephens M.A.* Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and related statistics – without extensive table [Text] / M.A. Stephens // *J. R. Stat. Soc.* – 1970. – Vol. 32. – P. 115–122.
81. *Stephens M.A.* EDF statistics for goodness of fit and some comparisons [Text] / M.A. Stephens // *Journal of the American statistical Association*. – 1974. – Vol. 69. – No. 347. – P. 730–737.

-
82. *Stigler S.M.* Do robust estimators work with real data? [Text] / S.M. Stigler // The Annals of Statistics. – 1977. – Vol.5. – No. 6. – P.1055–1098.
83. *Tricker A.R.* The effect of rounding on the significance level of certain normal test statistics [Text] / A.R. Tricker // Journal of Applied Statistics. – 1990. – Vol. 17. – No. 1. – P. 31–38.
84. *Tricker A.R.* The effect of rounding on the power level of certain normal test statistics [Text] / A.R. Tricker // Journal of Applied Statistics. – 1990. – Vol. 17. – No. 2. – P. 219–228.
85. *Uyanto S.S.* An Extensive Comparisons of 50 Univariate Goodness-of-fit Tests for Normality [Text] / S.S. Uyanto // Austrian Journal of Statistics. – 2022. – Vol. 51. – P. 45–97.
86. *Van Es B.* Estimating functionals related to a density by class of statistics based on spacings [Text] / B.Van Es // Scandinavian Journal of Statistics. – 1992. – Vol. 19. – P. 61–72.
87. *Vasicek Oldrich.* A Test for Normality Based on Sample Entropy [Text] /O. Vasicek // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). – 1976. – Vol. 38. – No. 1. – P. 54–59.
88. *Voinov V.* A comparative study of some modified chi-squared tests / V. Voinov, N. Pya, R. Alloyarova // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2009. – Vol. 38. – No. 3. – P.355–367.
89. *Voinov V.* A statistical reanalysis of the classical Rutherford’s experiment [Text] / V. Voinov, E. Voinov // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2010. – Vol.39. – No. 1. – P.157–171.
90. *Watson G.S.* Goodness-of-fit tests on a circle. I [Text] / G.S. Watson // Biometrika. – 1961. – Vol. 48. – No. 1-2. – P.109–114.
91. *Watson G.S.* Goodness-of-fit tests on a circle. II [Text] / G.S. Watson // Biometrika. – 1962. – Vol. 49. – No. 1-2. – P.57- 63.
92. *Weisberg S.* An approximate analysis of variance test for non-normality suitable for machine calculation [Text] / S. Weisberg, C. Bingham // Technometrics. – 1975. – Vol. 17. – No. 1. – P. 133-134.
93. *Zamanzade E.* Testing normality based on new entropy estimators [Text] / E. Zamanzade, N.R. Arghami // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 2012. – Vol. 82. No. 11. – P. 1701-1713.
94. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests [Text]: PhD Thesis / J. Zhang. – Toronto: York University, 2001.
95. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio [Text] / J. Zhang // Journal of the Royal Statistical Society: Series B. – 2002. – Vol. 64. – No. 2. – P. 281–294.
96. *Zhang J.* Likelihood-ratio tests for normality [Text] / J. Zhang, Yu. Wub // Computational Statistics & Data Analysis. – 2005. – Vol. 49. – No. 3. – P.709–721.
97. *Zhang J.* Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio [Text] / J. Zhang // Technometrics. – 2006. – Vol. 48. – No. 1. – P.95–103.

98. *Zhang P.* Omnibus test of normality using the Q statistic [Текст] / P. Zhang // Journal of Applied Statistics. – 1999. – Vol. 26. – No. 4. – P. 519–528.
99. *Большев Л.Н.* Асимптотические пирсоновские преобразования [Текст] / Л.Н. Большев // Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – Т. 8. – № 2. – С. 129–155.
100. *Большев Л.Н.* Таблицы математической статистики [Текст] / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
101. *Большев Л.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : избр. тр. [Текст] / Л.Н. Большев; под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Наука, 1987. – 286 с.
102. *Бушакова А.Д.* Исследование влияния вариантов асимптотической оптимальности группирования на мощность критериев типа χ^2 [Текст] / А.Д. Бушакова, Б.Ю. Лемешко // Материалы Российской НТК: Информатика и проблемы телекоммуникаций. Т. 1. – Новосибирск 2009. – С. 34–37.
103. *ГОСТ Р ИСО 5479–2002.* Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения [Текст]. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 30 с.
104. *Денисов В.И.* Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных [Текст] / В.И. Денисов, Б.Ю. Лемешко // Измерительные информационные системы. – Новосибирск, 1979. – С. 5–14.
105. *Денисов В.И.* Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов [Текст]: в 2 ч. / В.И. Денисов, Б.Ю. Лемешко, Е.Б. Цой; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1993. – 346 с.
106. *Денисов В.И.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим [Текст]: метод. реком. Ч. I. Критерии типа χ^2 / В.И. Денисов, Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – 126 с.
107. *Золотухина Л.В.* Эмпирическое исследование мощности критерия Саркади и его модификация [Текст] / Л.В. Золотухина, Е.В. Винник // Завод. лаб. – 1985. – Т. 51. № 1. – С. 51–55.
108. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников [Текст] / А.И. Кобзарь. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
109. *Козлова А.В.* Исследование распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия, предложенных Jin Zhang [Текст] / А.В. Козлова, Б.Ю. Лемешко // Материалы Российской НТК: Информатика и проблемы телекоммуникаций. Т. 1. – Новосибирск, – 2007. – С.136-139.
110. *Лемешко Б.Ю.* Группирование наблюдений как способ получения робастных оценок [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 5. – С.26–35.
111. *Лемешко Б.Ю.* Робастные методы оценивания и отбраковка аномальных измерений [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Заводская лаборатория. – 1997. – Т.63. – № 5. – С. 43–49.

112. *Лемешко Б.Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 8. – С. 3–14.
113. *Лемешко Б.Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64. – № 1. – С. 56–64.
114. *Лемешко Б.Ю.* Максимизация мощности критериев типа χ^2 [Текст] / Б.Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Докл. СО АН высш. шк. – Новосибирск, 2000. – № 2. – С. 53–61.
115. *Лемешко Б.Ю.* О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 67. – № 7. – С. 62–71.
116. *Лемешко Б.Ю.* Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез [Текст] / Б. Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов // Автотметрия. – 2001. – № 2. – С. 88–102.
117. *Лемешко Б.Ю.* Обеспечение наибольшей мощности применяемых критериев типа χ^2 [Текст] / М.Г. Березовский, Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Вестник СибГАУ. Вып.3. – Красноярск: СибГАУ, 2002. – С.78–85.
118. *Лемешко Б.Ю.* О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 [Текст] / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2003. – Т. 69. – № 1. – С. 61–67.
119. *Лемешко Б.Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей [Текст]: учебное пособие. / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 119 с.
120. *Лемешко Б.Ю.* Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Метрология. – 2005. – № 2. – С. 3–24.
121. *Лемешко Б.Ю.* Мощность критериев согласия при близких альтернативах [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Измерительная техника. – 2007. – № 2. – С.22–27.
122. *Лемешко Б.Ю.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11. – № 2 (34). – С.96–111.
123. *Лемешко Б.Ю.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11. – № 4 (36). – С.78–93.
124. *Лемешко Б.Ю.* Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.П. Рогожников // Метрология. – 2009. – № 4. – С. 3–24.

125. *Лемешко Б.Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 6. – С. 3–11.
126. *Лемешко Б.Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 8. – С.17–26.
127. *Лемешко Б.Ю.* О нормальности погрешностей измерений в классических экспериментах и мощности критериев, применяемых для проверки отклонения от нормального закона [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.П. Рогожников // Метрология. – 2012. – № 5. – С. 3–26.
128. *Лемешко Б.Ю.* О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 5. – С.3–9.
129. *Лемешко Б.Ю.* Применение непараметрических критериев согласия Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 9. – С.14–21.
130. *Лемешко Б.Ю.* О решении проблем применения некоторых непараметрических критериев согласия [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова, С.Б. Лемешко, А.П. Рогожников // Автотметрия. – 2014. – Т. 50. – № 1. – С.26–43.
131. *Лемешко Б.Ю.* Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению [Текст] / Б.Ю. Лемешко. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 163 с.
132. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению [Текст]: монография. – М.: ИНФРА-М, 2015. – 160 с.
133. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко, П.Ю. Блинов. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 183 с.
134. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки отклонения от экспоненциального закона. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко, П.Ю. Блинов. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 352 с.
135. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки гипотез о случайности и отсутствии тренда. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко, И.В. Веретельникова. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 221 с.
136. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 248 с.
137. *Лемешко Б.Ю.* К вопросу статистического анализа больших данных [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, М.А. Семёнова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 44. – С. 40–49.

138. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Влияние округления на свойства критериев проверки статистических гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Автометрия. – 2020. – Т. 56. – № 3. – С. 35–45.
139. Лемешко Б.Ю. О влиянии ошибок округления на распределения статистик критериев согласия [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 53. – С. 47–60.
140. Лемешко Б.Ю. Проблемы применения непараметрических критериев согласия в задачах обработки результатов измерений [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – № 2 (82). – С. 47–66.
141. Лемешко Б.Ю. Непараметрические критерии согласия при проверке нормальности в условиях округления измерений [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 2 (86). – С. 21–38.
142. Мартынов Г.В. Критерии омега-квадрат [Текст] / Г.В. Мартынов. – М.: Наука, 1978. – 80 с.
143. Никулин М.С. Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба [Текст] / М.С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. XVIII. – № 3. – С. 583–591.
144. Никулин М.С. О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений [Текст] / М.С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. XVIII. – № 3. – С. 675–676.
145. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений [Текст] / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 303 с.
146. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин "Интервальная статистка 5.4" [Электронный ресурс] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, П.Ю. Блинов, И.В. Веретельникова, А.Ю. Новикова // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018666213, 13.12.2018. Заявка № 2018663206 от 22.11.2018. URL: http://www.ami.nstu.ru/~headrd/ISW_exe.zip (дата обращения 24.04.2022).
147. Р 50.1.037–2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии [Текст]. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 64 с.
148. Р 50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат [Текст]. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 87 с.
149. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.
150. Чибисов Д.М. Некоторые критерии типа хи-квадрат для непрерывных распределений [Текст] / Д. М. Чибисов // Теория вероятностей и ее применение. – 1971. – Т. XVI. – № 1. – С. 3–20.

Спасибо за внимание!